

Тема I: Многочлены

§ 8. Симметрические многочлены и их приложения

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Симметрические многочлены: определение и примеры

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Итак, многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрический, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Итак, многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрический, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Примеры. 1) *Элементарные симметрические функции* $\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Итак, многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрический, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Примеры. 1) *Элементарные симметрические функции* $\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В случае надобности явно указать число переменных пишем $\sigma_k^{(n)}$.

Скажем, $\sigma_1^{(3)} = x_1 + x_2 + x_3$, а $\sigma_1^{(5)} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Итак, многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрический, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Примеры. 1) *Элементарные симметрические функции* $\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В случае надобности явно указать число переменных пишем $\sigma_k^{(n)}$.

Скажем, $\sigma_1^{(3)} = x_1 + x_2 + x_3$, а $\sigma_1^{(5)} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

2) *Степенные суммы* $s_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^k$.

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Итак, многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрический, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Примеры. 1) *Элементарные симметрические функции* $\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В случае надобности явно указать число переменных пишем $\sigma_k^{(n)}$.

Скажем, $\sigma_1^{(3)} = x_1 + x_2 + x_3$, а $\sigma_1^{(5)} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

2) *Степенные суммы* $s_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^k$.

3) Квадрат определителя Вандермонда $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Многочлен от переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановках переменных.

Итак, многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ симметрический, если

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

для любой перестановки $\pi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Примеры. 1) *Элементарные симметрические функции* $\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

В случае надобности явно указать число переменных пишем $\sigma_k^{(n)}$.

Скажем, $\sigma_1^{(3)} = x_1 + x_2 + x_3$, а $\sigma_1^{(5)} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

2) *Степенные суммы* $s_k(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n x_i^k$.

3) Квадрат определителя Вандермонда $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

4) По определению все многочлены нулевой степени и все многочлены от одной переменной – симметрические.

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Замечание. Многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется однозначно.

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Замечание. Многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется однозначно. Поскольку этот факт нам не понадобится, я не буду его здесь доказывать.

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Замечание. Многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется однозначно. Поскольку этот факт нам не понадобится, я не буду его здесь доказывать.

Доказательство. Проведем *двойную индукцию* – по *полной степени* многочлена и по числу переменных.

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Замечание. Многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется однозначно. Поскольку этот факт нам не понадобится, я не буду его здесь доказывать.

Доказательство. Проведем *двойную индукцию* – по *полной степени* многочлена и по числу переменных. Полная степень многочлена от нескольких переменных – это максимум сумм степеней его одночленов относительно каждой из входящих в них переменных. Например, полная степень многочлена $x_1^2 x_2^4 + x_1^3 x_3^5 + x_2^6 x_3$ равна 8.

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Замечание. Многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется однозначно. Поскольку этот факт нам не понадобится, я не буду его здесь доказывать.

Доказательство. Проведем *двойную индукцию* – по *полной степени* многочлена и по числу переменных. Полная степень многочлена от нескольких переменных – это максимум сумм степеней его одночленов относительно каждой из входящих в них переменных. Например, полная степень многочлена $x_1^2 x_2^4 + x_1^3 x_3^5 + x_2^6 x_3$ равна 8.

Для многочлена f нулевой полной степени, равно как и для многочлена f любой степени от одной переменной доказывать нечего, так как в роли многочлена g можно взять сам многочлен f .

Теорема о симметрических многочленах

Симметрический многочлен над полем представим как многочлен над тем же полем от элементарных симметрических функций своих переменных.

Формально: для любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ над тем же полем, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Замечание. Многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется однозначно.

Поскольку этот факт нам не понадобится, я не буду его здесь доказывать.

Доказательство. Проведем *двойную индукцию* – по *полной степени* многочлена и по числу переменных. Полная степень многочлена от нескольких переменных – это максимум сумм степеней его одночленов относительно каждой из входящих в них переменных. Например, полная степень многочлена $x_1^2 x_2^4 + x_1^3 x_3^5 + x_2^6 x_3$ равна 8.

Для многочлена f нулевой полной степени, равно как и для многочлена f любой степени от одной переменной доказывать нечего, так как в роли многочлена g можно взять сам многочлен f . (В случае многочлена от одной переменной имеем $f(x_1) = f(\sigma_1^{(1)})$, поскольку $\sigma_1^{(1)} = x_1$.)

Основная теорема о симметрических многочленах (2)

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Ясно, что h – симметрический многочлен.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Ясно, что h – симметрический многочлен. Заметим, что

$$\sigma_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \sigma_k^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

и полные степени $\sigma_k^{(n)}$ и $\sigma_k^{(n-1)}$ равны k для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Ясно, что h – симметрический многочлен. Заметим, что

$$\sigma_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \sigma_k^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

и полные степени $\sigma_k^{(n)}$ и $\sigma_k^{(n-1)}$ равны k для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Отсюда полная степень $g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)})$ равна полной степени

$g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)})$ и не превосходит m . Поэтому полная степень $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не превосходит m .

Основная теорема о симметрических многочленах (2)

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Ясно, что h – симметрический многочлен. Заметим, что

$$\sigma_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \sigma_k^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

и полные степени $\sigma_k^{(n)}$ и $\sigma_k^{(n-1)}$ равны k для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Отсюда полная степень $g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)})$ равна полной степени $g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)})$ и не превосходит m . Поэтому полная степень $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не превосходит m . Кроме того, имеем

$$h(x_1, x_2, \dots, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) - g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)})$$

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Ясно, что h – симметрический многочлен. Заметим, что

$$\sigma_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \sigma_k^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

и полные степени $\sigma_k^{(n)}$ и $\sigma_k^{(n-1)}$ равны k для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Отсюда полная степень $g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)})$ равна полной степени $g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)})$ и не превосходит m . Поэтому полная степень $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не превосходит m . Кроме того, имеем

$$h(x_1, x_2, \dots, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) - g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}) \stackrel{(\star)}{=} 0.$$

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – симметрический многочлен с $n > 1$ и полной степенью $m > 0$. Рассмотрим многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$. Он симметрический относительно x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , и по предположению индукции существует многочлен $g(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, такой, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}). \quad (\star)$$

Здесь полная степень обеих частей $\leq m$. Рассмотрим теперь многочлен

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)}).$$

Ясно, что h – симметрический многочлен. Заметим, что

$$\sigma_k^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \sigma_k^{(n-1)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

и полные степени $\sigma_k^{(n)}$ и $\sigma_k^{(n-1)}$ равны k для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Отсюда полная степень $g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n)})$ равна полной степени $g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)})$ и не превосходит m . Поэтому полная степень $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не превосходит m . Кроме того, имеем

$$h(x_1, x_2, \dots, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) - g(\sigma_1^{(n-1)}, \sigma_2^{(n-1)}, \dots, \sigma_{n-1}^{(n-1)}) \stackrel{(\star)}{=} 0.$$

По следствию теоремы Безу $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ делится на $x_n - 0 = x_n$.

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$.

Основная теорема о симметрических многочленах (3)

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$.
Переставив x_i и x_n , в силу симметричности $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим
 $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i)$, откуда h делится
на x_i для любого i .

Основная теорема о симметрических многочленах (3)

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$.
Переставив x_i и x_n , в силу симметричности $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим
 $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i)$, откуда h делится
на x_i для любого i . В силу однозначности разложения в кольце
многочленов отсюда следует, что h делится на $x_1 x_2 \cdots x_n = \sigma_n$.

Основная теорема о симметрических многочленах (3)

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$.

Переставив x_i и x_n , в силу симметричности $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим

$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i)$, откуда h делится

на x_i для любого i . В силу однозначности разложения в кольце

многочленов отсюда следует, что h делится на $x_1 x_2 \cdots x_n = \sigma_n$.

Итак, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sigma_n}$ – многочлен, очевидно,

симметрический и имеющий меньшую полную степень, чем многочлен h ,

полная степень которого не превосходит m .

Основная теорема о симметрических многочленах (3)

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$.

Переставив x_i и x_n , в силу симметричности $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим

$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i)$, откуда h делится

на x_i для любого i . В силу однозначности разложения в кольце

многочленов отсюда следует, что h делится на $x_1 x_2 \cdots x_n = \sigma_n$.

Итак, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sigma_n}$ – многочлен, очевидно,

симметрический и имеющий меньшую полную степень, чем многочлен h ,

полная степень которого не превосходит m . По предположению индукции

существует многочлен $r(y_1, y_2, \dots, y_n)$, такой, что

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Основная теорема о симметрических многочленах (3)

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$.

Переставив x_i и x_n , в силу симметричности $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим

$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i)$, откуда h делится

на x_i для любого i . В силу однозначности разложения в кольце

многочленов отсюда следует, что h делится на $x_1 x_2 \cdots x_n = \sigma_n$.

Итак, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sigma_n}$ – многочлен, очевидно,

симметрический и имеющий меньшую полную степень, чем многочлен h ,

полная степень которого не превосходит m . По предположению индукции

существует многочлен $r(y_1, y_2, \dots, y_n)$, такой, что

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Но тогда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$$

Имеем $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n q(x_1, \dots, x_n)$ для некоторого $q(x_1, \dots, x_n)$. Переставив x_i и x_n , в силу симметричности $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получим $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_i)$, откуда h делится на x_i для любого i . В силу однозначности разложения в кольце многочленов отсюда следует, что h делится на $x_1 x_2 \cdots x_n = \sigma_n$.

Итак, $p(x_1, x_2, \dots, x_n) := \frac{h(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sigma_n}$ – многочлен, очевидно, симметрический и имеющий меньшую полную степень, чем многочлен h , полная степень которого не превосходит m . По предположению индукции существует многочлен $r(y_1, y_2, \dots, y_n)$, такой, что

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= h(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}) \\ &= \sigma_n p(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}) \\ &= \sigma_n r(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) + g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}). \end{aligned}$$



Следствие: симметрические многочлены от корней

Для нас важно следствие основной теоремы о симметрических многочленах, которое получается, если скомбинировать ее со следствием формул Виета: *с точностью до знака коэффициенты унитарного многочлена суть элементарные симметрические функции его корней.*

Следствие: симметрические многочлены от корней

Для нас важно следствие основной теоремы о симметрических многочленах, которое получается, если скомбинировать ее со следствием формул Виета: *с точностью до знака коэффициенты унитарного многочлена суть элементарные симметрические функции его корней.*

Следствие (симметрические многочлены от корней)

Любой симметрический многочлен от корней унитарного многочлена $f(x)$ над некоторым полем представим как многочлен над тем же полем от коэффициентов многочлена $f(x)$.

Следствие: симметрические многочлены от корней

Для нас важно следствие основной теоремы о симметрических многочленах, которое получается, если скомбинировать ее со следствием формул Виета: *с точностью до знака коэффициенты унитарного многочлена суть элементарные симметрические функции его корней.*

Следствие (симметрические многочлены от корней)

Любой симметрический многочлен от корней унитарного многочлена $f(x)$ над некоторым полем представим как многочлен над тем же полем от коэффициентов многочлена $f(x)$.

Примеры. 1) Для многочлена с действительными коэффициентами сумма k -х степеней его корней (включая комплексные!) – действительное число.

Следствие: симметрические многочлены от корней

Для нас важно следствие основной теоремы о симметрических многочленах, которое получается, если скомбинировать ее со следствием формул Виета: *с точностью до знака коэффициенты унитарного многочлена суть элементарные симметрические функции его корней.*

Следствие (симметрические многочлены от корней)

Любой симметрический многочлен от корней унитарного многочлена $f(x)$ над некоторым полем представим как многочлен над тем же полем от коэффициентов многочлена $f(x)$.

Примеры. 1) Для многочлена с действительными коэффициентами сумма k -х степеней его корней (включая комплексные!) – действительное число.

2) Квадрат определителя Вандермонда $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от корней любого многочлена $f(x)$ выражается через коэффициенты многочлена $f(x)$. Это выражение называется **дискриминантом** многочлена $f(x)$.

Следствие: симметрические многочлены от корней

Для нас важно следствие основной теоремы о симметрических многочленах, которое получается, если скомбинировать ее со следствием формул Виета: *с точностью до знака коэффициенты унитарного многочлена суть элементарные симметрические функции его корней.*

Следствие (симметрические многочлены от корней)

Любой симметрический многочлен от корней унитарного многочлена $f(x)$ над некоторым полем представим как многочлен над тем же полем от коэффициентов многочлена $f(x)$.

Примеры. 1) Для многочлена с действительными коэффициентами сумма k -х степеней его корней (включая комплексные!) – действительное число.

2) Квадрат определителя Вандермонда $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от корней любого многочлена $f(x)$ выражается через коэффициенты многочлена $f(x)$. Это выражение называется **дискриминантом** многочлена $f(x)$. Дискриминант многочлена $f(x)$ равен 0 тогда и только тогда, когда у $f(x)$ есть кратные корни в поле разложения (**объясните, почему**).

Следствие: симметрические многочлены от корней

Для нас важно следствие основной теоремы о симметрических многочленах, которое получается, если скомбинировать ее со следствием формул Виета: *с точностью до знака коэффициенты унитарного многочлена суть элементарные симметрические функции его корней.*

Следствие (симметрические многочлены от корней)

Любой симметрический многочлен от корней унитарного многочлена $f(x)$ над некоторым полем представим как многочлен над тем же полем от коэффициентов многочлена $f(x)$.

Примеры. 1) Для многочлена с действительными коэффициентами сумма k -х степеней его корней (включая комплексные!) – действительное число.

2) Квадрат определителя Вандермонда $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от корней любого многочлена $f(x)$ выражается через коэффициенты многочлена $f(x)$. Это выражение называется **дискриминантом** многочлена $f(x)$. Дискриминант многочлена $f(x)$ равен 0 тогда и только тогда, когда у $f(x)$ есть кратные корни в поле разложения (*объясните, почему*). Несложно подсчитать, что для квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ это определение приводит в точности к «школьной» формуле $p^2 - 4q$ для дискриминанта.

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел:
любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n|$$

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n|$$

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n| \leq A(|x^{n-1}| + \dots + 1).$$

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n| \leq A(|x^{n-1}| + \dots + 1).$$

При $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$A(|x^{n-1}| + \dots + 1)$$

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n| \leq A(|x^{n-1}| + \dots + 1).$$

При $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$A(|x^{n-1}| + \dots + 1) = A \frac{|x^n| - 1}{|x| - 1}$$

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n| \leq A(|x^{n-1}| + \dots + 1).$$

При $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$A(|x^{n-1}| + \dots + 1) = A \frac{|x^n| - 1}{|x| - 1} < A \frac{|x^n|}{|x| - 1}$$

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n| \leq A(|x^{n-1}| + \dots + 1).$$

При $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$A(|x^{n-1}| + \dots + 1) = A \frac{|x^n| - 1}{|x| - 1} < A \frac{|x^n|}{|x| - 1} < A \frac{|x^n|}{\frac{A}{|a_0|}}$$

Лемма о модуле старшего члена

Мы уже формулировали основную теорему алгебры комплексных чисел: *любой многочлен положительной степени над полем \mathbb{C} имеет по крайней мере один комплексный корень.*

Теперь мы ее докажем. Первым шагом будет простое наблюдение.

Лемма о модуле старшего члена

Пусть $f(x)$ – многочлен над полем \mathbb{C} . Тогда при всех достаточно больших по модулю значениях x модуль старшего члена многочлена $f(x)$ больше модуля суммы всех остальных его членов.

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Положим $A := \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$. По свойствам модуля имеем для любого x :

$$|a_1x^{n-1} + \dots + a_n| \leq |a_1x^{n-1}| + \dots + |a_n| \leq A(|x^{n-1}| + \dots + 1).$$

При $|x| > \frac{A}{|a_0|} + 1$, суммируя геометрическую прогрессию, получаем

$$A(|x^{n-1}| + \dots + 1) = A \frac{|x^n| - 1}{|x| - 1} < A \frac{|x^n|}{|x| - 1} < A \frac{|x^n|}{\frac{A}{|a_0|}} = |a_0x^n|. \quad \square$$

Следствие 1

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ – многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} . Тогда при всех достаточно больших положительных значениях x знак $f(x)$ совпадает со знаком a_0 , а при всех достаточно больших по модулю отрицательных значениях x знак $f(x)$ противоположен знаку a_0 .

Следствие 1

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ – многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} . Тогда при всех достаточно больших положительных значениях x знак $f(x)$ совпадает со знаком a_0 , а при всех достаточно больших по модулю отрицательных значениях x знак $f(x)$ противоположен знаку a_0 .



Следствия леммы о модуле старшего члена (2)

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ в его поле разложения; каждый корень взят столько раз, какова его кратность.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ в его поле разложения; каждый корень взят столько раз, какова его кратность. Зафиксируем некоторое число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим элементы $\beta_{ij} := c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$, где $1 \leq i < j \leq n$.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ в его поле разложения; каждый корень взят столько раз, какова его кратность. Зафиксируем некоторое число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим элементы $\beta_{ij} := c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Построим многочлен, для которого эти элементы являются корнями: $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$.

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ в его поле разложения; каждый корень взят столько раз, какова его кратность. Зафиксируем некоторое число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим элементы $\beta_{ij} := c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Построим многочлен, для которого эти элементы являются корнями: $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$.

Степень $g_c(x)$ есть $\frac{n(n-1)}{2}$

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один **комплексный** корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ в его поле разложения; каждый корень взят столько раз, какова его кратность. Зафиксируем некоторое число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим элементы $\beta_{ij} := c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Построим многочлен, для которого эти элементы являются корнями: $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$.

Степень $g_c(x)$ есть $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k m(2^k m - 1)}{2}$

Многочлены над \mathbb{R} – непрерывные функции. Поэтому, комбинируя предыдущее следствие и классический результат анализа (*теорема о промежуточном значении* aka *первая теорема Больцано–Коши*), получаем

Следствие 2

Любой многочлен нечетной степени над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один действительный корень.

Для многочленов четной степени над \mathbb{R} аналог следствия 2 не верен – пример $x^2 + 1$. Но мы докажем, что любой многочлен $f(x)$ над полем \mathbb{R} имеет по крайней мере один *комплексный* корень. Пусть $\deg f = n = 2^k m$, где m нечетно. Проведем индукцию по k ; следствие 2 дает базу $k = 0$.

Пусть $k > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ в его поле разложения; каждый корень взят столько раз, какова его кратность. Зафиксируем некоторое число $c \in \mathbb{R}$ и рассмотрим элементы $\beta_{ij} := c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Построим многочлен, для которого эти элементы являются корнями: $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$.

Степень $g_c(x)$ есть $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k m(2^k m - 1)}{2} = 2^{k-1} \underbrace{m(2^k m - 1)}_{\text{нечетно}}$.

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$.

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка.

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i .

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Итак, имеем $g_c(x) \in \mathbb{R}[x]$, и по предположению индукции $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ для какой-то пары (i, j) .

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Итак, имеем $g_c(x) \in \mathbb{R}[x]$, и по предположению индукции $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ для какой-то пары (i, j) .

Пар (i, j) конечное число, а чисел $c \in \mathbb{R}$ бесконечно много.

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Итак, имеем $g_c(x) \in \mathbb{R}[x]$, и по предположению индукции $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ для какой-то пары (i, j) .

Пар (i, j) конечное число, а чисел $c \in \mathbb{R}$ бесконечно много. По принципу Дирихле найдутся два разных действительных числа c и d , которым отвечает одна и та же пара (i, j) .

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Итак, имеем $g_c(x) \in \mathbb{R}[x]$, и по предположению индукции $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ для какой-то пары (i, j) .

Пар (i, j) конечное число, а чисел $c \in \mathbb{R}$ бесконечно много. По принципу Дирихле найдутся два разных действительных числа c и d , которым отвечает одна и та же пара (i, j) . Значит, для каких-то $u, v \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{cases} c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j = u, \\ d(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j = v. \end{cases}$$

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Итак, имеем $g_c(x) \in \mathbb{R}[x]$, и по предположению индукции $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ для какой-то пары (i, j) .

Пар (i, j) конечное число, а чисел $c \in \mathbb{R}$ бесконечно много. По принципу Дирихле найдутся два разных действительных числа c и d , которым отвечает одна и та же пара (i, j) . Значит, для каких-то $u, v \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{cases} c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j = u, \\ d(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j = v. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_i + \alpha_j = \frac{u - v}{c - d}$

Поэтому если показать, что коэффициенты $g_c(x)$ – действительные числа, то к $g_c(x)$ можно будет применить предположение индукции!

Коэффициенты многочлена $g_c(x) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \beta_{ij})$ не меняются при перестановках $\beta_{ij} = c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j$. Если совершить произвольную перестановку корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то и с элементами β_{ij} произойдет некоторая перестановка. Поэтому коэффициенты многочлена $g_c(x)$ не меняются при перестановках α_i . Значит, эти коэффициенты выражаются как многочлены с действительными коэффициентами от элементарных симметрических функций от α_i , а последние с точностью до знака суть коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Итак, имеем $g_c(x) \in \mathbb{R}[x]$, и по предположению индукции $\beta_{ij} \in \mathbb{C}$ для какой-то пары (i, j) .

Пар (i, j) конечное число, а чисел $c \in \mathbb{R}$ бесконечно много. По принципу Дирихле найдутся два разных действительных числа c и d , которым отвечает одна и та же пара (i, j) . Значит, для каких-то $u, v \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{cases} c(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j = u, \\ d(\alpha_i + \alpha_j) + \alpha_i \alpha_j = v. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_i + \alpha_j = \frac{u-v}{c-d}$ и $c \frac{u-v}{c-d} + \alpha_i \left(\frac{u-v}{c-d} - \alpha_i \right) = u$.

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами.

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Доказательство основной теоремы (2)

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$. Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n} x^n + \overline{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \overline{b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$.

Доказательство основной теоремы (2)

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$. Положим $\overline{h}(x) := \overline{b_n} x^n + \overline{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \overline{b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\overline{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны.

Доказательство основной теоремы (2)

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$. Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n} x^n + \overline{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \overline{b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $b_0 \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + b_k \overline{b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{b_0} b_k + \overline{b_1} b_{k-1} + \dots + \overline{b_{k-1}} b_1 + \overline{b_k} b_0$.

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Положим $\overline{h}(x) := \overline{b_n} x^n + \overline{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \overline{b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\overline{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $\overline{b_0} \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + \overline{b_k} \overline{b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{\overline{b_0} \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + \overline{b_k} \overline{b_0}}$.

По доказанному у $f(x)$ есть хотя бы один комплексный корень α .

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n} x^n + \overline{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \overline{b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $\overline{b_0} \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + \overline{b_k} \overline{b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{\overline{b_0} \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + \overline{b_k} \overline{b_0}}$.

По доказанному у $f(x)$ есть хотя бы один комплексный корень α . Имеем $f(\alpha) = h(\alpha)\bar{h}(\alpha) = 0$, откуда либо $h(\alpha) = 0$, либо $\bar{h}(\alpha) = 0$.

Доказательство основной теоремы (2)

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n} x^n + \overline{b_{n-1}} x^{n-1} + \dots + \overline{b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $\overline{b_0} \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + \overline{b_k} \overline{b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{\overline{b_0} \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + \overline{b_k} \overline{b_0}}$.

По доказанному у $f(x)$ есть хотя бы один комплексный корень α .

Имеем $f(\alpha) = h(\alpha)\bar{h}(\alpha) = 0$, откуда либо $h(\alpha) = 0$, либо $\bar{h}(\alpha) = 0$.

В первом случае α – корень $h(x)$, и все доказано, а во втором

$$h(\bar{\alpha}) = b_n \bar{\alpha}^n + b_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + b_0$$

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $b_0 \overline{b_k} + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + b_k \overline{b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{b_0 b_k + \overline{b_1} \overline{b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1}} \overline{b_1} + b_k \overline{b_0}}$.

По доказанному у $f(x)$ есть хотя бы один комплексный корень α .

Имеем $f(\alpha) = h(\alpha)\bar{h}(\alpha) = 0$, откуда либо $h(\alpha) = 0$, либо $\bar{h}(\alpha) = 0$.

В первом случае α – корень $h(x)$, и все доказано, а во втором

$$\begin{aligned} h(\bar{\alpha}) &= b_n \bar{\alpha}^n + b_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + b_0 = \\ &= \overline{\overline{b_n \alpha^n + b_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + b_0}} = \overline{h(\alpha)} = 0. \end{aligned}$$

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $\overline{b_0 b_k} + \overline{b_1 b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1} b_1} + \overline{b_k b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{\overline{b_0 b_k} + \overline{b_1 b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1} b_1} + \overline{b_k b_0}}$.

По доказанному у $f(x)$ есть хотя бы один комплексный корень α .

Имеем $f(\alpha) = h(\alpha)\bar{h}(\alpha) = 0$, откуда либо $h(\alpha) = 0$, либо $\bar{h}(\alpha) = 0$.

В первом случае α – корень $h(x)$, и все доказано, а во втором

$$\begin{aligned} h(\bar{\alpha}) &= b_n \bar{\alpha}^n + b_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + b_0 = \\ &= \overline{\overline{b_n \alpha^n + b_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + b_0}} = \overline{h(\alpha)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае $\bar{\alpha}$ – корень $h(x)$. □

Получили для α_i квадратное уравнение с комплексными коэффициентами. Решение такого уравнения – комплексное число. Таким образом, у многочлена $f(x)$ есть комплексный корень.

Чтобы завершить доказательство основной теоремы, нужно рассмотреть произвольный многочлен $h(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{C}[x]$.

Положим $\bar{h}(x) := \overline{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$ и рассмотрим многочлен $f(x) := h(x)\bar{h}(x)$. Все коэффициенты многочлена $f(x)$ действительны. В самом деле, коэффициент $\overline{b_0 b_k} + \overline{b_1 b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1} b_1} + \overline{b_k b_0}$ при x^k равен своему сопряженному $\overline{\overline{b_0 b_k} + \overline{b_1 b_{k-1}} + \dots + \overline{b_{k-1} b_1} + \overline{b_k b_0}}$.

По доказанному у $f(x)$ есть хотя бы один комплексный корень α .

Имеем $f(\alpha) = h(\alpha)\bar{h}(\alpha) = 0$, откуда либо $h(\alpha) = 0$, либо $\bar{h}(\alpha) = 0$.

В первом случае α – корень $h(x)$, и все доказано, а во втором

$$\begin{aligned} h(\bar{\alpha}) &= b_n \bar{\alpha}^n + b_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + b_0 = \\ &= \overline{\overline{b_n \alpha^n + b_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + b_0}} = \overline{h(\alpha)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, во втором случае $\bar{\alpha}$ – корень $h(x)$. □

Приведенное доказательство принадлежит Гауссу (1815).

Оно основано на идеях Эйлера и Лагранжа.

Напомним два следствия основной теоремы алгебры комплексных чисел.

Напомним два следствия основной теоремы алгебры комплексных чисел.

Следствие (разложение многочленов над \mathbb{C})

Любой многочлен степени $n > 0$ над полем \mathbb{C} однозначно представим как произведение n линейных двучленов.

Напомним два следствия основной теоремы алгебры комплексных чисел.

Следствие (разложение многочленов над \mathbb{C})

Любой многочлен степени $n > 0$ над полем \mathbb{C} однозначно представим как произведение n линейных двучленов.

Следствие (разложение многочленов над \mathbb{R})

Любой многочлен степени $n > 0$ над полем \mathbb{R} однозначно представим как произведение $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ квадратных трехчленов с отрицательными дискриминантами и $n - 2k$ линейных двучленов.