Тема II: Многочлены

§ 2. Рациональные дроби

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР).

Поле частных области целостности

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.

Поле частных области целостности

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$.

Поле частных области целостности

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Поле частных области целостности

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.

Поле частных области целостности

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$. Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$.
Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$.
Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$.
Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$.
Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область.
Итак, $af = be$, т.е. $(a, b) \equiv (e, f)$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$.
Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$.
Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область.
Итак, $af = be$, т.е. $(a, b) \equiv (e, f)$.

Классы эквивалентности $\equiv$ будем называть *дробями*.

Поле частных области целостности

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$.
Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$.
Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область.
Итак, $af = be$, т.е. $(a, b) \equiv (e, f)$.

Классы эквивалентности $\equiv$ будем называть *дробями*.
Дробь, содержащую пару $(a, b) \in M$, обозначаем $\frac{a}{b}$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$. Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$. Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область. Итак, $af = be$, т.е. $(a, b) \equiv (e, f)$.

Классы эквивалентности $\equiv$ будем называть *дробями*.
Дробь, содержащую пару $(a, b) \in M$, обозначаем $\dfrac{a}{b}$.

Имеем $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$.
Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$.
Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область.
Итак, $af = be$, т.е. $(a, b) \equiv (e, f)$.

Классы эквивалентности $\equiv$ будем называть *дробями*.
Дробь, содержащую пару $(a, b) \in M$, обозначаем $\dfrac{a}{b}$.

Имеем $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$. В частности, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ при любом $c \neq 0$.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a, b) \equiv (a, b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a, b) \equiv (c, d)$ равносильно $(c, d) \equiv (a, b)$.
Транзитивность. Пусть $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$. Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$. Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область. Итак, $af = be$, т.е. $(a, b) \equiv (e, f)$.

Классы эквивалентности $\equiv$ будем называть *дробями*.
Дробь, содержащую пару $(a, b) \in M$, обозначаем $\frac{a}{b}$.
Имеем $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$. В частности, $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ при любом $c \neq 0$.
Множество всех дробей обозначим через F.

Пусть D – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить D до поля.
Построение схоже с построением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ из кольца $\mathbb{Z}$.

Итак, пусть $M := \{(a,b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$. Определим на M отношение $\equiv$:

$$(a,b) \equiv (c,d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что $\equiv$ – отношение эквивалентности.
Рефлексивность очевидна: $(a,b) \equiv (a,b)$, ибо $ab = ba$.
Симметричность очевидна: $ad = bc$ равносильно $cb = da$, т.е. $(a,b) \equiv (c,d)$ равносильно $(c,d) \equiv (a,b)$.
Транзитивность. Пусть $(a,b) \equiv (c,d) \equiv (e,f)$, т.е. $ad = bc$ и $cf = de$. Умножив 1-е равенство на f, а 2-е на b, получим $adf = bcf$ и $bcf = bde$. Отсюда $adf = bde$; на $d \neq 0$ можно сократить, так как D – область. Итак, $af = be$, т.е. $(a,b) \equiv (e,f)$.

Классы эквивалентности $\equiv$ будем называть *дробями*.
Дробь, содержащую пару $(a,b) \in M$, обозначаем $\dfrac{a}{b}$.

Имеем $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$. В частности, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$ при любом $c \neq 0$.
Множество всех дробей обозначим через F. Оно и станет искомым полем.

Поле частных области целостности (2)

Определим на F операции $+$ и $\cdot$ и проверим аксиомы поля.

Поле частных области целостности (2)

Определим на F операции $+$ и $\cdot$ и проверим аксиомы поля.

Определим сложение правилом

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd},$$

а умножение – правилом

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Поле частных области целостности (2)

Определим на F операции $+$ и $\cdot$ и проверим аксиомы поля.

Определим сложение правилом

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd},$$

а умножение – правилом

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Необходимо удостовериться, что эти определения *корректны*, т.е. что если $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$, то $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1}$ и $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1}$.

Поле частных области целостности (2)

Определим на F операции $+$ и $\cdot$ и проверим аксиомы поля.

Определим сложение правилом

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd},$$

а умножение – правилом

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Необходимо удостовериться, что эти определения *корректны*, т.е. что если $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$, то $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1}$ и $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1}$. Это легко.

Определим на F операции $+$ и $\cdot$ и проверим аксиомы поля.

Определим сложение правилом

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}:=\frac{ad+bc}{bd},$$

а умножение – правилом

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:=\frac{ac}{bd}.$$

Необходимо удостовериться, что эти определения *корректны*, т.е. что если $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{d_1}$, то $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}$ и $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{c_1}{d_1}$. Это легко.

Роль нуля в F играет дробь $\dfrac{0}{1}$ (или любая равная ей дробь $\dfrac{0}{b}$ с $b\neq 0$):

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a\cdot 1+b\cdot 0}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}.$$

Определим на F операции $+$ и $\cdot$ и проверим аксиомы поля.

Определим сложение правилом

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}:=\frac{ad+bc}{bd},$$

а умножение – правилом

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}:=\frac{ac}{bd}.$$

Необходимо удостовериться, что эти определения *корректны*, т.е. что если $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{d_1}$, то $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}$ и $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{c_1}{d_1}$. Это легко.

Роль нуля в F играет дробь $\frac{0}{1}$ (или любая равная ей дробь $\frac{0}{b}$ с $b\neq 0$):

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a\cdot 1+b\cdot 0}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}.$$

Роль единицы в F играет дробь $\frac{1}{1}$ (или любая равная ей дробь $\frac{b}{b}$ с $b\neq 0$):

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}.$$

Поле частных области целостности (3)

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$.

Поле частных области целостности (3)

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$.

При $a \neq 0$ обратной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{b}{a}$: $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab}$.

Поле частных области целостности (3)

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$.

При $a \neq 0$ обратной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{b}{a}$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab}$.

Все остальные аксиомы поля устанавливаются прямыми вычислениями.

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\quad \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$.

При $a \neq 0$ обратной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{b}{a}$: $\quad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab}$.

Все остальные аксиомы поля устанавливаются прямыми вычислениями.

Итак, F – поле. Область D отождествим с подкольцом в F, состоящим из всех дробей вида $\frac{a}{1}$.

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab-ba}{bb}=\frac{0}{bb}$.

При $a\neq 0$ обратной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{b}{a}$: $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{ab}{ab}$.

Все остальные аксиомы поля устанавливаются прямыми вычислениями.

Итак, F – поле. Область D отождествим с подкольцом в F, состоящим из всех дробей вида $\frac{a}{1}$. Поле F называется *полем частных* области D.

Поле частных области целостности (3)

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$.

При $a \neq 0$ обратной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{b}{a}$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab}$.

Все остальные аксиомы поля устанавливаются прямыми вычислениями.

Итак, F – поле. Область D отождествим с подкольцом в F, состоящим из всех дробей вида $\frac{a}{1}$. Поле F называется *полем частных* области D.

Важные частные случаи этой конструкции:

- поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть поле частных кольца $\mathbb{Z}$;
- *поле рациональных функций* $F(x)$ есть поле частных кольца многочленов $F[x]$.

Противоположной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{-a}{b}$: $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$.

При $a \neq 0$ обратной к дроби $\frac{a}{b}$ будет дробь $\frac{b}{a}$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab}$.

Все остальные аксиомы поля устанавливаются прямыми вычислениями.

Итак, F – поле. Область D отождествим с подкольцом в F, состоящим из всех дробей вида $\frac{a}{1}$. Поле F называется *полем частных* области D.

Важные частные случаи этой конструкции:

- поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ есть поле частных кольца $\mathbb{Z}$;
- *поле рациональных функций* $F(x)$ есть поле частных кольца многочленов $F[x]$.

Рациональные функции над $\mathbb{R}$, т.е. дроби вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ – многочлены с действительными коэффициентами, играют важную роль в курсе математического анализа, в частности, в теории интегрирования.

Определение

Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$ и $f \neq 0$.

Определение

Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$ и $f \neq 0$.

Замечание

Любая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и правильной дроби.

Определение

Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$ и $f \neq 0$.

Замечание

Любая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и правильной дроби.

Доказательство. Рассмотрим произвольную рациональную дробь $\dfrac{f}{g}$.

Определение

Рациональная дробь $\frac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$ и $f \neq 0$.

Замечание

Любая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и правильной дроби.

Доказательство. Рассмотрим произвольную рациональную дробь $\frac{f}{g}$. Если многочлен f делится на многочлен g, т.е. $f = gh$ для некоторого многочлена h, то $\frac{f}{g} = h$.

Правильные и простейшие дроби

Определение

Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$ и $f \neq 0$.

Замечание

Любая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и правильной дроби.

Доказательство. Рассмотрим произвольную рациональную дробь $\dfrac{f}{g}$. Если многочлен f делится на многочлен g, т.е. $f = gh$ для некоторого многочлена h, то $\dfrac{f}{g} = h$. В противном случае поделим f на g с остатком: $f = qg + r$, где $\deg r < \deg g$ и $r \neq 0$. Тогда $\dfrac{f}{g} = q + \dfrac{r}{g}$, причем дробь $\dfrac{r}{g}$ правильная. $\square$

Определение

Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется *правильной*, если $\deg f < \deg g$ и $f \neq 0$.

Замечание

Любая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и правильной дроби.

Доказательство. Рассмотрим произвольную рациональную дробь $\dfrac{f}{g}$. Если многочлен f делится на многочлен g, т.е. $f = gh$ для некоторого многочлена h, то $\dfrac{f}{g} = h$. В противном случае поделим f на g с остатком: $f = qg + r$, где $\deg r < \deg g$ и $r \neq 0$. Тогда $\dfrac{f}{g} = q + \dfrac{r}{g}$, причем дробь $\dfrac{r}{g}$ правильная. $\square$

Рациональная дробь $\dfrac{f}{g}$ называется *простейшей*, если существуют многочлен p, неприводимый над полем F, и натуральное число n такие, что $g = p^n$ и $\deg f < \deg p$.

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x^2+1}$

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$.

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$.

А вот дроби $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3}$ правильные, но не простейшие (*объясните, почему*).

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$.

А вот дроби $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3}$ правильные, но не простейшие (*объясните, почему*).

Теорема о рациональных дробях

Любая правильная дробь из $F(x)$, где F – произвольное поле, может быть представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями.

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}, \dfrac{2x}{x^2+1}, \dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$.

А вот дроби $\dfrac{2x}{x^2-1}, \dfrac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3}$ правильные, но не простейшие (*объясните, почему*).

Теорема о рациональных дробях

Любая правильная дробь из $F(x)$, где F – произвольное поле, может быть представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями. Это представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$.

А вот дроби $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3}$ правильные, но не простейшие (*объясните, почему*).

Теорема о рациональных дробях

Любая правильная дробь из $F(x)$, где F – произвольное поле, может быть представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями. Это представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

Так, для дробей из примеров выше

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1},$$

Примеры простейших дробей из $\mathbb{R}(x)$: $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$.

А вот дроби $\dfrac{2x}{x^2-1}$, $\dfrac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3}$ правильные, но не простейшие (*объясните, почему*).

Теорема о рациональных дробях

Любая правильная дробь из $F(x)$, где F – произвольное поле, может быть представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями. Это представление единственно с точностью до порядка слагаемых.

Так, для дробей из примеров выше

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1},$$

$$\frac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{3}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}.$$

Доказательство. Существование. Доказательство разобьем на два шага.

Теорема о рациональных дробях (2)

Доказательство. Существование. Доказательство разобьем на два шага. На первом шаге докажем, что правильная дробь может быть представлена как сумма правильных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена.

Теорема о рациональных дробях (2)

Доказательство. Существование. Доказательство разобьем на два шага. На первом шаге докажем, что правильная дробь может быть представлена как сумма правильных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена. На втором шаге докажем, что правильная дробь, знаменатель которой – степень неприводимого многочлена, представима как сумма простейших дробей.

Доказательство. Существование. Доказательство разобьем на два шага. На первом шаге докажем, что правильная дробь может быть представлена как сумма правильных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена. На втором шаге докажем, что правильная дробь, знаменатель которой – степень неприводимого многочлена, представима как сумма простейших дробей.

Итак, пусть $\dfrac{f}{g}$ – правильная дробь. Разложим ее знаменатель g в произведение неприводимых многочленов: $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

Доказательство. Существование. Доказательство разобьем на два шага. На первом шаге докажем, что правильная дробь может быть представлена как сумма правильных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена. На втором шаге докажем, что правильная дробь, знаменатель которой – степень неприводимого многочлена, представима как сумма простейших дробей.

Итак, пусть $\dfrac{f}{g}$ – правильная дробь. Разложим ее знаменатель g в произведение неприводимых многочленов: $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

Шаг 1. Докажем индукцией по n, что

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{f_n}{p_n^{k_n}} \tag{1}$$

для некоторых многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ таких, что $\deg f_i < \deg p_i^{k_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Существование. Доказательство разобьем на два шага. На первом шаге докажем, что правильная дробь может быть представлена как сумма правильных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена. На втором шаге докажем, что правильная дробь, знаменатель которой – степень неприводимого многочлена, представима как сумма простейших дробей.

Итак, пусть $\dfrac{f}{g}$ – правильная дробь. Разложим ее знаменатель g в произведение неприводимых многочленов: $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

Шаг 1. Докажем индукцией по n, что

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{f_n}{p_n^{k_n}} \qquad (1)$$

для некоторых многочленов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ таких, что $\deg f_i < \deg p_i^{k_i}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

База индукции очевидна: если $n = 1$, то равенство (1) выполнено при $f_1 = f$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$.

Теорема о рациональных дробях (3)

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

Теорема о рациональных дробях (3)

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$.

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$. Но

$\deg f_1 + \deg g_2$

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \qquad (2)$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2 g_1 + f_1 g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$. Но

$\deg f_1 + \deg g_2 = \deg(f_1 g_2)$

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$. Но

$\deg f_1 + \deg g_2 = \deg(f_1g_2) = \deg(qg_1 + fv)g_2$

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$. Но

$$\deg f_1 + \deg g_2 = \deg(f_1g_2) = \deg(qg_1 + fv)g_2 \overset{(2)}{=} \deg(f - rg_1)$$

Шаг индукции. Пусть $n > 1$. Положим $g_1 = p_1^{k_1}$ и $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$. Многочлены g_1 и g_2 взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены u и v такие, что $ug_1 + vg_2 = 1$. Следовательно, $f = fug_1 + fvg_2$. Разделим fu на g_2 с остатком: $fu = qg_2 + r$, где $\deg r < \deg g_2$. Имеем:
$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$, откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \tag{2}$$

Положим $f_1 := qg_1 + fv$ и $f_2 := r$. Тогда $f = f_2g_1 + f_1g_2$, откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь $\dfrac{f_2}{g_2}$ представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и $\dfrac{f_1}{g_1}$ является правильной, т.е. что $\deg f_1 < \deg g_1$. Последнее неравенство равносильно неравенству $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$. Но

$$\deg f_1 + \deg g_2 = \deg(f_1g_2) = \deg(qg_1 + fv)g_2 \overset{(2)}{=} \deg(f - rg_1) \leqslant \max\{\deg f, \deg(rg_1)\}.$$

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$.

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Шаг 2. Докажем индукцией по k, что каждая правильная дробь вида $\dfrac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей.

Теорема о рациональных дробях (4)

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Шаг 2. Докажем индукцией по k, что каждая правильная дробь вида $\dfrac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей. Если $k = 1$, то $\dfrac{f}{p}$ – уже простейшая дробь, и все доказано.

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Шаг 2. Докажем индукцией по k, что каждая правильная дробь вида $\dfrac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей.

Если $k = 1$, то $\dfrac{f}{p}$ – уже простейшая дробь, и все доказано.

Пусть $k > 1$. Разделим f на p с остатком: $f = qp + r$, где $\deg r < \deg p$, а $\deg qp = \deg f < \deg p^k$, откуда $\deg q < \deg p^{k-1}$.

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Шаг 2. Докажем индукцией по k, что каждая правильная дробь вида $\frac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей.

Если $k = 1$, то $\frac{f}{p}$ – уже простейшая дробь, и все доказано.

Пусть $k > 1$. Разделим f на p с остатком: $f = qp + r$, где $\deg r < \deg p$, а $\deg qp = \deg f < \deg p^k$, откуда $\deg q < \deg p^{k-1}$. Тогда

$$\frac{f}{p^k} = \frac{qp + r}{p^k}$$

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Шаг 2. Докажем индукцией по k, что каждая правильная дробь вида $\frac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей.
Если $k = 1$, то $\frac{f}{p}$ – уже простейшая дробь, и все доказано.
Пусть $k > 1$. Разделим f на p с остатком: $f = qp + r$, где $\deg r < \deg p$, а $\deg qp = \deg f < \deg p^k$, откуда $\deg q < \deg p^{k-1}$. Тогда

$$\frac{f}{p^k} = \frac{qp + r}{p^k} = \frac{q}{p^{k-1}} + \frac{r}{p^k}.$$

Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$. Оба этих неравенства проверяются легко: $\deg f < \deg g = \deg(g_1 g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$ и $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$.

Шаг 2. Докажем индукцией по k, что каждая правильная дробь вида $\frac{f}{p^k}$, где p – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей.

Если $k = 1$, то $\frac{f}{p}$ – уже простейшая дробь, и все доказано.

Пусть $k > 1$. Разделим f на p с остатком: $f = qp + r$, где $\deg r < \deg p$, а $\deg qp = \deg f < \deg p^k$, откуда $\deg q < \deg p^{k-1}$. Тогда

$$\frac{f}{p^k} = \frac{qp + r}{p^k} = \frac{q}{p^{k-1}} + \frac{r}{p^k}.$$

Дробь $\frac{r}{p^k}$ либо равна 0 (если $r = 0$), либо простейшая, а дробь $\frac{q}{p^{k-1}}$ правильная и равна сумме простейших дробей по предположению индукции.

Единственность. Предположим, что некоторая правильная дробь двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \dots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \dots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}.$$

Единственность. Предположим, что некоторая правильная дробь двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \dots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \dots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть равенства и выполнив сложение дробей с одинаковыми знаменателями, получим равенство вида

$$\frac{s_1}{t_1} + \dots + \frac{s_r}{t_r} = 0,$$

где все слагаемые являются простейшими дробями с разными знаменателями.

Единственность. Предположим, что некоторая правильная дробь двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \cdots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \cdots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть равенства и выполнив сложение дробей с одинаковыми знаменателями, получим равенство вида

$$\frac{s_1}{t_1} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0,$$

где все слагаемые являются простейшими дробями с разными знаменателями. Заметим, что $r > 1$ (простейшая дробь не равна 0 по определению).

Единственность. Предположим, что некоторая правильная дробь двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \cdots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \cdots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть равенства и выполнив сложение дробей с одинаковыми знаменателями, получим равенство вида

$$\frac{s_1}{t_1} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0,$$

где все слагаемые являются простейшими дробями с разными знаменателями. Заметим, что $r > 1$ (простейшая дробь не равна 0 по определению). Пусть $t_1 = p^k$ для некоторого неприводимого многочлена p. Будем считать, что слагаемые пронумерованы так, что для каждого $i = 2, \ldots, r$ либо $t_i = p^\ell$, где $\ell < k$, либо t_i – степень неприводимого многочлена, отличного от p.

Единственность. Предположим, что некоторая правильная дробь двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \dots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \dots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть равенства и выполнив сложение дробей с одинаковыми знаменателями, получим равенство вида

$$\frac{s_1}{t_1} + \dots + \frac{s_r}{t_r} = 0,$$

где все слагаемые являются простейшими дробями с разными знаменателями. Заметим, что $r > 1$ (простейшая дробь не равна 0 по определению). Пусть $t_1 = p^k$ для некоторого неприводимого многочлена p. Будем считать, что слагаемые пронумерованы так, что для каждого $i = 2, \dots, r$ либо $t_i = p^\ell$, где $\ell < k$, либо t_i – степень неприводимого многочлена, отличного от p. Обозначим через Q наименьший общий знаменатель всех слагаемых второго типа, т.е. слагаемых, знаменатели которых – степени неприводимых многочленов, отличных от p.
По свойствам неприводимых многочленов Q и p взаимно просты.

Умножим обе части равенства $\dfrac{s_1}{p^k} + \dfrac{s_2}{t_2} + \cdots + \dfrac{s_r}{t_r} = 0$ на $p^{k-1}Q$.

Теорема о рациональных дробях (6)

Умножим обе части равенства $\frac{s_1}{p^k} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0$ на $p^{k-1}Q$. Получим равенство вида $\frac{s_1 Q}{p} + R = 0$, где R – некоторый многочлен.

Умножим обе части равенства $\frac{s_1}{p^k} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0$ на $p^{k-1}Q$. Получим равенство вида $\frac{s_1 Q}{p} + R = 0$, где R – некоторый многочлен. Отсюда $s_1 Q = -pR$. Таким образом, многочлен p делит $s_1 Q$. Напомним, что p и Q взаимно просты. По свойствам взаимно простых многочленов отсюда вытекает, что p делит s_1.

Умножим обе части равенства $\frac{s_1}{p^k} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0$ на $p^{k-1}Q$. Получим равенство вида $\frac{s_1 Q}{p} + R = 0$, где R – некоторый многочлен. Отсюда $s_1 Q = -pR$. Таким образом, многочлен p делит $s_1 Q$. Напомним, что p и Q взаимно просты. По свойствам взаимно простых многочленов отсюда вытекает, что p делит s_1. Но это невозможно, так как дробь $\frac{s_1}{p^k}$ является простейшей, и потому $\deg s_1 < \deg p$. $\square$

Теорема о рациональных дробях (6)

Умножим обе части равенства $\frac{s_1}{p^k} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0$ на $p^{k-1}Q$. Получим равенство вида $\frac{s_1 Q}{p} + R = 0$, где R – некоторый многочлен. Отсюда $s_1 Q = -pR$. Таким образом, многочлен p делит $s_1 Q$. Напомним, что p и Q взаимно просты. По свойствам взаимно простых многочленов отсюда вытекает, что p делит s_1. Но это невозможно, так как дробь $\frac{s_1}{p^k}$ является простейшей, и потому $\deg s_1 < \deg p$. □

Утверждение об единственности важно потому, что оно позволяет находить разложение правильной дроби в сумму простейших с помощью *метода неопределенных коэффициентов*.

Умножим обе части равенства $\frac{s_1}{p^k} + \frac{s_2}{t_2} + \cdots + \frac{s_r}{t_r} = 0$ на $p^{k-1}Q$. Получим равенство вида $\frac{s_1 Q}{p} + R = 0$, где R – некоторый многочлен. Отсюда $s_1 Q = -pR$. Таким образом, многочлен p делит $s_1 Q$. Напомним, что p и Q взаимно просты. По свойствам взаимно простых многочленов отсюда вытекает, что p делит s_1. Но это невозможно, так как дробь $\frac{s_1}{p^k}$ является простейшей, и потому $\deg s_1 < \deg p$. $\square$

Утверждение об единственности важно потому, что оно позволяет находить разложение правильной дроби в сумму простейших с помощью *метода неопределенных коэффициентов*. Если известно представление знаменателя правильной дроби $\frac{f}{g}$ в виде произведения неприводимых множителей, то можно предсказать вид простейших дробей, которые могут появиться в разложении дроби $\frac{f}{g}$, записать это разложение с неопределенными коэффициентами, а потом найти эти коэффициенты, приведя дроби в разложению к общему знаменателю g и приравняв числитель получившейся дроби к f.

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.
$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$.

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.

$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.
$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.
$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Итак, $3x^2+2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$.

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.

$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Итак, $3x^2 + 2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$.

Подставляя $x = 1$, находим $5 = 4A$, т.е. $A = \dfrac{5}{4}$.

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.
$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Итак, $3x^2+2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$.
Подставляя $x=1$, находим $5=4A$, т.е. $A=\dfrac{5}{4}$. Аналогично, подставляя $x=-1$, находим $5=-4B$, т.е. $B=-\dfrac{5}{4}$.

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.

$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Итак, $3x^2+2 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$.

Подставляя $x=1$, находим $5=4A$, т.е. $A=\dfrac{5}{4}$. Аналогично, подставляя $x=-1$, находим $5=-4B$, т.е. $B=-\dfrac{5}{4}$. Приравнивая коэффициенты при x^3, имеем $0=A+B+C$, откуда $C=0$.

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.
$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Итак, $3x^2+2 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$.
Подставляя $x=1$, находим $5=4A$, т.е. $A=\dfrac{5}{4}$. Аналогично, подставляя $x=-1$, находим $5=-4B$, т.е. $B=-\dfrac{5}{4}$. Приравнивая коэффициенты при x^3, имеем $0=A+B+C$, откуда $C=0$. Наконец, приравнивая свободные члены, имеем $2=A-B-D$, откуда $D=\dfrac{1}{2}$.

Пример

Разложим в сумму простейших правильную дробь $\dfrac{3x^2+2}{x^4-1} \in \mathbb{R}(x)$.
$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$ – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}.$$

Итак, $3x^2+2=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$.
Подставляя $x=1$, находим $5=4A$, т.е. $A=\dfrac{5}{4}$. Аналогично, подставляя $x=-1$, находим $5=-4B$, т.е. $B=-\dfrac{5}{4}$. Приравнивая коэффициенты при x^3, имеем $0=A+B+C$, откуда $C=0$. Наконец, приравнивая свободные члены, имеем $2=A-B-D$, откуда $D=\dfrac{1}{2}$. Окончательно,

$$\frac{3x^2+2}{x^4-1} = \frac{5}{4(x-1)} - \frac{5}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}.$$