

Вопросы к экзамену по алгебре и геометрии (Весенний семестр 2021/2022 учебного года)

1. Основные понятия теории делимости. Отношение ассоциированности. Деление многочленов с остатком.
2. Теорема о наибольшем общем делителе. Алгоритм Евклида.
3. Существование и однозначность разложения на неразложимые множители в кольце многочленов над полем.
4. Поле частных области. Разложение рациональных дробей на простейшие дроби.
5. Лемма Гаусса и ее следствия.
6. Однозначность разложения на неприводимые многочлены в кольце многочленов над областью с однозначным разложением.
7. Неприводимые многочлены с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна. Алгоритм Кронекера.
8. Неприводимые многочлены над полями вычетов
9. Теорема Безу. Корни многочлена. Кратные корни. Число корней многочлена n -й степени.
10. Формальная производная многочлена. Отделение кратных множителей.
11. Поле разложения многочлена. Конечные поля.
12. Симметрические многочлены. Формулы Виета. Основная теорема о симметрических многочленах.
13. Лемма о модуле старшего члена. Основная теорема алгебры комплексных чисел. Классификация неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел.
14. Изменение матрицы при замене базиса.
15. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора.
16. Предложение о линейной независимости собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Признак диагонализуемости линейного оператора.
17. Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на унитарном (евклидовом) пространстве.
18. Сопряженный оператор. Линейность сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения. Матрица сопряженного оператора
19. Теорема Фредгольма.

20. Нормальный оператор. Ортогональность собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям нормального оператора. Теорема о строении нормального оператора на унитарном пространстве.
21. Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве.
22. Унитарный (ортогональный) оператор. Матрица унитарного (ортогонального) оператора. Характеризация унитарного (ортогонального) оператора как движения.
23. Теорема о строении унитарного (ортогонального) оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
24. Самосопряженный оператор. Матрица самосопряженного оператора. Теорема о строении самосопряженного оператора.
25. Неотрицательные самосопряженные операторы. Квадратные корни из неотрицательных самосопряженных операторов.
26. Полярное разложение оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
27. Сингулярные числа и их применения. Теорема Эккарта–Янга.
28. Псевдообратный оператор. Нормальное псевдорешение несовместной системы линейных уравнений.
29. Инвариантные подпространства. Разложение Фиттинга.
30. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении. Алгоритм построения базиса корневого подпространства.
31. Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема о минимальном многочлене. Гамильтона–Кэли. Критерий диагонализуемости линейного оператора.
32. Жорданов базис нильпотентного оператора.
33. Нормальная форма Жордана. Матричная форма теоремы Жордана. Единственность жордановой формы. Критерий подобия матриц.
34. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
35. Закон инерции действительных квадратичных форм.
36. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
37. Классификация плоских квадрик.
38. Классификация пространственных квадрик.