

§ 16. Прямая в пространстве

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

16.1. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве

Этот параграф во многом схож с двумя предыдущими, но есть и существенные отличия. Как и в случаях кривой на плоскости и поверхности, кривую в пространстве можно задавать либо общими, либо параметрическими уравнениями. Общие уравнения в данном случае возникают из следующего простого наблюдения: любую кривую в пространстве можно представить как пересечение двух поверхностей.

Определение

Будем считать, что в пространстве зафиксирована некоторая система координат. Пусть кривая ℓ является пересечением поверхностей σ_1 и σ_2 , поверхность σ_1 задана общим уравнением $F_1(x, y, z) = 0$, а поверхность σ_2 — общим уравнением $F_2(x, y, z) = 0$. Тогда уравнения

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

называются *общими уравнениями* кривой ℓ .

Из определения общего уравнения поверхности, данного в § 15, вытекает, что точка лежит на кривой ℓ тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений (1).

Параметрические уравнения кривой в пространстве определяются вполне аналогично одноименным уравнениям кривой на плоскости, которые упоминались в § 14.

Определение

Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \quad (2)$$

где $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ — произвольные функции от одной переменной, называются *параметрическими уравнениями* кривой ℓ , если точка M с координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на ℓ тогда и только тогда, когда существует число t_0 такое, что $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$ и $z_0 = h(t_0)$. Переменная t называется *параметром*.

16.2. Виды уравнений прямой в пространстве

Перейдем к основной теме этого параграфа — изучению прямых в пространстве.

Понятие направляющего вектора для прямой в пространстве вводится точно так же, как это было сделано в §14 для прямой на плоскости.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*.

Из этого определения видно, что

- направляющий вектор для данной прямой определен неоднозначно: прямая в пространстве имеет бесконечно много (коллинеарных друг другу) направляющих векторов.

Отметим еще, что *для прямой в пространстве понятие нормального вектора не определено*. Формально можно было бы назвать нормальным вектором прямой в пространстве произвольный ортогональный ей ненулевой вектор, но никакой пользы для изучения прямой это понятие не дает, поскольку векторов с указанным свойством «слишком много» — они заполняют собой целую плоскость (перпендикулярную к данной прямой).

Параметрические уравнения прямой

Перейдем к рассмотрению видов уравнений прямой в пространстве. Мы рассмотрим четыре вида таких уравнений: параметрические, канонические, по двум точкам и общие. По сравнению с видами уравнений плоскости и прямой на плоскости (см. два предыдущих параграфа), здесь отсутствуют аналоги уравнений с угловым коэффициентом и в отрезках.

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат. Пусть ℓ — прямая в пространстве, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит прямой ℓ , а вектор $\vec{a} = (q, r, s)$ является ее направляющим вектором. Дословно повторяя рассуждения, проведенные в § 14 при выводе параметрических уравнений прямой на плоскости, можно показать, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда выполнены равенства

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st \end{cases} \quad (3)$$

для некоторого t . Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве*.

Понятие параметрических уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия параметрических уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Выражая параметр t из первого, второго и третьего уравнений системы (3) и приравнявая полученные выражения, мы получаем уравнения

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}, \quad (4)$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве*.

Предположим теперь, что мы знаем координаты двух различных точек, принадлежащих прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ коллинеарен прямой и отличен от нулевого вектора, т. е. является направляющим вектором прямой.

Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем следующие уравнения, которые называются *уравнениями прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \quad (5)$$

Из сказанного выше вытекают следующие два замечания.

Замечание 16.1

Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3) и (4), то вектор с координатами (q, r, s) является ее направляющим вектором.

Замечание 16.2

Если прямая в пространстве задана любым из уравнений (3), (4) и (5), то точка с координатами (x_0, y_0, z_0) принадлежит прямой.

Общие уравнения прямой (1)

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть ℓ — прямая, являющаяся пересечением плоскостей σ_1 и σ_2 , а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — общие уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad (6)$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*. Из того, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, вытекает, что либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (см. теорему 15.2). Теорема со следующего слайда показывает, что понятие общих уравнений прямой в пространстве является частным случаем понятия общих уравнений кривой в пространстве, которое было введено в начале данного параграфа.

Теорема 16.1

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая прямая в пространстве может быть задана уравнениями вида (6), в которых либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Обратно, любые уравнения вида (6) с указанным ограничением на числа A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 определяют прямую.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказано выше. Докажем второе утверждение. Рассмотрим систему (6). Каждое из двух уравнений, входящих в эту систему, задает некоторую плоскость. Эти две плоскости пересекаются, поскольку коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы (6) не пропорциональны (см. теорему 15.2). Ясно, что прямая, по которой пересекаются эти плоскости, задается системой (6). \square

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (1)

Замечание 14.3 указывает простой способ нахождения направляющего вектора прямой на плоскости, заданной общим уравнением. Рассмотрим аналогичную задачу для прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями (6). Требуется найти координаты ее направляющего вектора. По условию либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Пусть (x_0, y_0, z_0) — координаты некоторой точки, принадлежащей прямой ℓ . Тогда справедливы равенства $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$. Вычтем первое из этих равенств из первого уравнения системы (6), а второе — из второго уравнения этой системы. Получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (2)

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$. Поскольку $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, определитель этой системы отличен от нуля. По теореме Крамера ее решение можно найти по следующим формулам:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z - z_0) & B_1 \\ -C_2(z - z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \text{а} \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z - z_0) \\ A_2 & -C_2(z - z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Используя 2-е и 4-е свойства определителей и принцип равноправия строк и столбцов, получаем, что

$$x - x_0 = \frac{(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \text{а} \quad y - y_0 = \frac{-(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в произвольной системе координат (3)

Следовательно,

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad \text{и} \quad \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

откуда

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Мы получили канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями (6). В силу замечания 16.1 справедливо следующее утверждение.

Замечание 16.2

Вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \quad (7)$$

является направляющим вектором прямой, заданной уравнениями (6). \square

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (1)

Мы вывели замечание 16.2 в предположении, что система координат — произвольная. Формулы получились достаточно громоздкими и трудными для запоминания. Однако в случае, когда система координат — прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод).

Итак, предположим, что прямая ℓ задана системой уравнений (6) в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым уравнением системы (6), через σ_1 и σ_2 соответственно. Векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются теперь нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно (см. замечание 15.5). Положим $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n}_1$. Поскольку $\vec{n}_1 \perp \sigma_1$, получаем, что $\vec{b} \parallel \sigma_1$. Аналогично проверяется, что $\vec{b} \parallel \sigma_2$. Но тогда \vec{b} коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2 , т. е. прямой ℓ . Далее, из того, что плоскости σ_1 и σ_2 не параллельны и не совпадают, вытекает, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$. В силу 2-го критерия коллинеарности векторов (см. предложение 11.1), $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$. Таким образом, вектор \vec{b} является направляющим вектором прямой ℓ .

Нахождение направляющего вектора прямой, заданной общими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат (2)

Осталось заметить, что векторное произведение векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 имеет в точности те координаты, которые указаны в правой части равенства (7) (см. формулу (3) в §11). Итак, справедливо

Замечание 16.3

Если в прямоугольной декартовой системе координат прямая задана как пересечение двух плоскостей, то в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов этих плоскостей.

Отметим еще, что

- направляющий вектор прямой ℓ , заданной уравнениями (6), можно найти не используя замечаний 16.2 и 16.3.

В самом деле, найдем координаты двух различных точек M_1 и M_2 , принадлежащих ℓ (т. е. два различных решения (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) системы уравнений (6)). Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, очевидно, будет направляющим вектором прямой ℓ . Этот способ применим в любой системе координат.

Мы завершили рассмотрение видов уравнений прямой в пространстве.

Взаимное расположение прямой и плоскости (1)

Перейдем к вопросам о взаимном расположении прямой и плоскости и о взаимном расположении двух прямых.

16.3. Взаимное расположение прямой и плоскости

Теорема 16.2

Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая ℓ — уравнениями (3). Тогда:

- 1) ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$;
- 2) ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;
- 3) ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными x , y , z и t :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st. \end{cases} \quad (8)$$

Взаимное расположение прямой и плоскости (2)

Подставим правые части трех последних уравнений этой системы вместо x , y и z в первое уравнение. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (9)$$

Ясно, что если $Aq + Br + Cs \neq 0$, то это уравнение имеет единственное решение. Но тогда система (8) также имеет единственное решение, и потому прямая ℓ и плоскость σ пересекаются. Если $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то уравнение (9) не имеет решений. В этом случае система (8) также не имеет решений, и потому ℓ и σ параллельны. Наконец, если $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение (9) имеет бесконечно много решений. В этом случае система (8) также имеет бесконечно много решений, и потому ℓ лежит в σ .

Мы доказали достаточность в каждом из утверждений 1)–3). После этого необходимость в каждом из них легко доказывается аналогично тому, как была доказана необходимость в утверждениях 1)–3) теоремы 14.2. \square

16.4. Взаимное расположение двух прямых

Теорема 16.3

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}.$$

- 1) l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$;
- 2) l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$ и либо $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$, либо $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$;
- 3) l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ и либо $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$, либо $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$;
- 4) l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ и $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$.

Взаимное расположение двух прямых (2)

Доказательство. Введем следующие обозначения: $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ — направляющий вектор прямой ℓ_1 ; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ — направляющий вектор прямой ℓ_2 ; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_1 ; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — точка, принадлежащая прямой ℓ_2 ; $\vec{c} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы \vec{c} , \vec{a}_1 и \vec{a}_2 компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из замечания 12.2.

Предположим теперь, что прямые лежат в одной плоскости. Ясно, что при выполнении этого условия прямые пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Вновь используя замечание 12.2 и учитывая критерий коллинеарности векторов, получаем утверждение 2).

Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1 . Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае — параллельны. Вновь используя критерий коллинеарности векторов и учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{r_1} = \frac{z-z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3) и 4). □

16.5. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Наша ближайшая цель — вывести формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве. Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M(x_1, y_1, z_1)$ — произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0) , принадлежащую прямой ℓ , обозначим через M_0 , а вектор с координатами (q, r, s) , являющийся направляющим вектором прямой ℓ , — через \vec{a} . Кроме того, положим $\vec{c} = \overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 1.

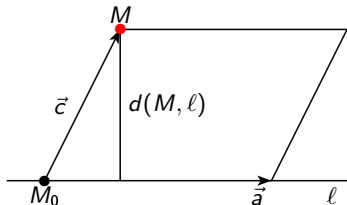


Рис. 1. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой (2)

Обозначим расстояние от точки M до прямой ℓ через $d(M, \ell)$. Ясно, что $d(M, \ell)$ — высота параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{c} . Обозначим его площадь через S . Тогда $d(M, \ell) = \frac{S}{|\vec{a}|}$. Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов, мы получаем, что

$$d(M, \ell) = \frac{|\vec{a} \times \vec{c}|}{|\vec{a}|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния от точки до прямой в пространстве. Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 11, можно в явном виде выразить $d(M, \ell)$ через координаты точек M_0 и M и вектора \vec{a} :

$$d(M, \ell) = \sqrt{\frac{(r(z_1 - z_0) - s(y_1 - y_0))^2 + (q(z_1 - z_0) - s(x_1 - x_0))^2 + (q(y_1 - y_0) - r(x_1 - x_0))^2}{q^2 + r^2 + s^2}}.$$

16.6. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Наша следующая цель — научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Прежде, чем выводить соответствующую формулу, надо сказать, что понимается под таким расстоянием. Для этого нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым l_1 и l_2 называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых l_1 и l_2 и пересекающая каждую из них.

Ни из каких априорных соображений не вытекает, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым существует. Докажем, что это так.

Теорема 16.4

Для произвольных скрещивающихся прямых l_1 и l_2 существует общий перпендикуляр к этим прямым.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2 на следующем слайде. Пусть \vec{s}_1 и \vec{s}_2 — направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно. Ясно, что эти векторы не коллинеарны, так как в противном случае прямые l_1 и l_2 были бы параллельными или совпадали бы. Обозначим через σ плоскость, проходящую через l_1 параллельно l_2 , а через l'_2 — ортогональную проекцию l_2 на плоскость σ . Поскольку $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, прямые l_1 и l'_2 пересекаются. Обозначим точку их пересечения через M . Поскольку $M \in l'_2$, из построения прямой l'_2 вытекает, что точка M является ортогональной проекцией на плоскость σ некоторой точки $N \in l_2$. Очевидно, что прямая MN перпендикулярна каждой из прямых l_1 и l_2 и пересекает каждую из них. Следовательно, эта прямая является общим перпендикуляром к l_1 и l_2 . □

Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым (3)

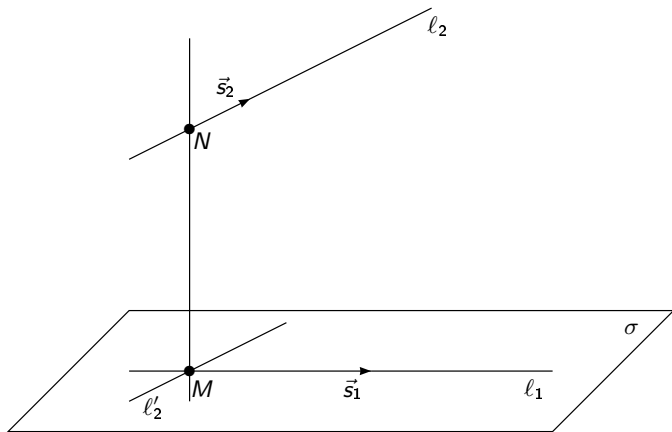


Рис. 2. Построение общего перпендикуляра

Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2 и обозначается через $d(\ell_1, \ell_2)$.

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида A_1A_2 , где $A_1 \in \ell_1$, а $A_2 \in \ell_2$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми (2)

Для того, чтобы вывести формулу расстояния между скрещивающимися прямыми, продолжим построения, начатые при доказательстве теоремы 16.4. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 3 на следующем слайде. Пусть l_1 и l_2 — скрещивающиеся прямые, l — их общий перпендикуляр, \vec{s}_1 и \vec{s}_2 — направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно, M — точка пересечения прямых l и l_1 , а N — точка пересечения прямых l и l_2 . Возьмем произвольные точки $A_1 \in l_1$ и $A_2 \in l_2$. Обозначим через B и C концы направленных отрезков, которые получатся, если отложить от точки A_1 векторы \vec{s}_1 и \vec{s}_2 соответственно. Построим параллелепипед на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$. Ясно, что расстояние между прямыми l_1 и l_2 (т.е. длина отрезка MN) совпадает с длиной высоты этого параллелепипеда, опущенной из точки A_2 . Положим $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Длина высоты параллелепипеда равна частному от деления его объема на площадь основания. Таким образом, чтобы найти расстояние между прямыми l_1 и l_2 , надо объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , разделить на площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{s}_1 и \vec{s}_2 .

Расстояние между скрещивающимися прямыми (3)

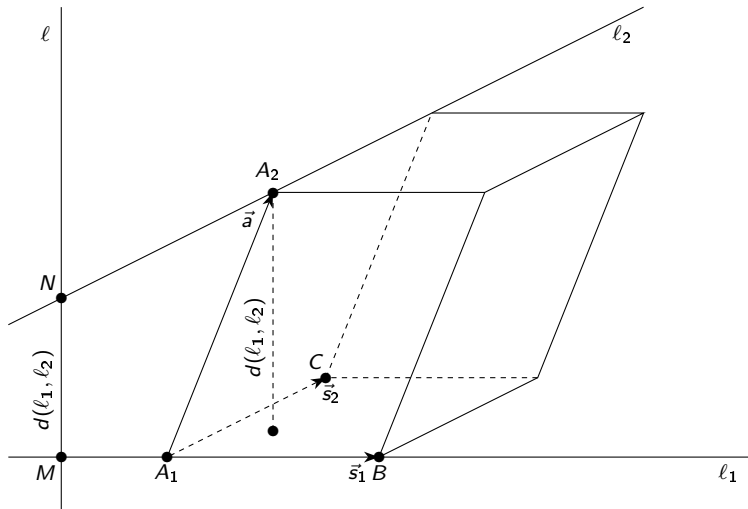


Рис. 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми (4)

Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов, мы получаем, что

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\vec{a}\vec{s}_1\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}.$$

По существу, это и есть формула расстояния между скрещивающимися прямыми.

Если система координат, заданная в пространстве, является прямоугольной декартовой, то, используя формулу (5) из § 11 и формулу (4) из § 12, можно в явном виде выразить $d(l_1, l_2)$ через координаты точек M_1 и M_2 и векторов \vec{s}_1 и \vec{s}_2 . Обозначим координаты точек M_1 и M_2 через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно, а координаты векторов \vec{s}_1 и \vec{s}_2 — через (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) соответственно. Тогда:

$$d(l_1, l_2) = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_1c_2 - c_1a_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}}$$

(символом mod здесь, как и в формуле (6) из § 11, обозначен модуль определителя).