§ 13. Система координат. Координаты точки

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

13.1. Понятие системы координат

В школьном курсе математики сначала вводятся координаты точки, а затем с их помощью определяются координаты вектора. В систематическом курсе математики порядок появления этих понятий обратный — координаты вектора у нас уже появились в §9, а теперь на их основе будут определены координаты точки. Но сначала надо сказать, что мы будем понимать под словами «система координат».

Определения

Аффинной системой координат или просто *системой координат в пространстве* [*на плоскости*] называется совокупность базиса пространства [соответственно базиса плоскости] и точки [принадлежащей этой плоскости]. Точка, входящая в систему координат, называется *началом системы координат*. Систему координат, состоящую из базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и начала координат O, будем обозначать через $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$; в случае плоскости используется обозначение $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$.

Наряду с аффинной, существуют и другие системы координат (например, полярная на плоскости или сферическая в пространстве), но в нашем курсе они возникать не будут.

Понятие системы координат (2)

Определения

Прямые, проходящие через точку O параллельно одному из базисных векторов, называются *осями координат*. Прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_1$ [соответственно $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$], будем называть *осью абсцисс* [соответственно *осью ординат*, *осью аппликат*]. Плоскости, проходящие через точку O и две из трех осей координат, называются *координатными плоскостями*.

Координаты точки

Определение

Пусть $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — система координат в пространстве, а M — произвольная точка. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе координат $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называются координаты ее радиуса-вектора в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тот факт, что точка M в некоторой системе координат имеет координаты (a_1, a_2, a_3), будем обозначать так: $M(a_1, a_2, a_3)$. Координаты точки на плоскости определяются аналогично координатам точки в пространстве.

Пусть точки A и B имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, а координаты точек A и B совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно, получаем, что

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3). \tag{1}$$

Иными словами,

- *чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Прямоугольная декартова система координат

Определение

Система координат в пространстве $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — правый ортонормированный. Система координат на плоскости $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — ортонормированный.

- В дальнейшем прямоугольная декартова система координат будет играть ту же роль, которую в § 10–12 играл ортонормированный базис, — именно в прямоугольной декартовой системе координат многие формулы и уравнения будут принимать наиболее простой и удобный для применения вид.

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox, Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy, Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

Расстояние между точками

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая формулу (1) из данного параграфа и формулу (5) из § 10, получаем, что расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{2}$$

13.2. Деление отрезка в данном отношении

Определение

Предположим, что даны различные точки A и B и число t. Будем говорить, что *точка* C *делит отрезок* AB *в отношении* t, если

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}. \tag{3}$$

Например, если C — середина отрезка AB, то она делит его в отношении 1 (так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$), точка A делит его в отношении 0 (так как $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$), а точка B не делит его ни в каком отношении (так как $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ и не существует такого числа t, что $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{BB}$). На рис. 1 точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\frac{1}{2}$, а точка C_2 — в отношении -4.

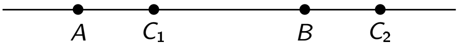

Рис. 1. Деление отрезка в данном отношении

- Как видно из последнего примера, точка, делящая отрезок в некотором отношении, не обязана принадлежать этому отрезку.

Деление отрезка в данном отношении: результат

Предложение 13.1

Пусть $A(a_1, a_2, a_3)$ *и* $B(b_1, b_2, b_3)$ *— две различные точки.*

1) *Точки, делящей отрезок* AB *в отношении* -1, *не существует.*
2) *Если* t *— произвольное действительное число, отличное от* -1, *то точка* C, *делящая отрезок* AB *в отношении* t, *существует и единственна, а ее координаты* (c_1, c_2, c_3) *могут быть найдены по формулам*
$$\begin{cases} c_1 = \frac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \frac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \frac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases} \qquad (4)$$
3) *Точка* C *делит отрезок* AB *в некотором отношении тогда и только тогда, когда она принадлежит прямой* AB *и отлична от точки* B.

Формулы (4) называются *формулами деления отрезка в отношении* t.

Деление отрезка в данном отношении: доказательство (1)

Доказательство. 1) Предположим, что точка C делит отрезок AB в отношении -1, т. е. $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CB}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$, что невозможно, так как точки A и B различны.

2) Пусть $t \neq -1$. Рассмотрим точку $C(c_1, c_2, c_3)$, координаты которой задаются равенствами (4). Тогда будут выполняться равенства

$$c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1),\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2) \text{ и } c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3).$$

Но эти равенства есть не что иное, как равенство (3), расписанное в координатах. Следовательно, точка C делит отрезок AB в отношении t. Осталось доказать, что она единственна. В самом деле, предположим, что точка $D(d_1, d_2, d_3)$ делит отрезок AB в отношении t. Тогда $\overrightarrow{AD} = t \cdot \overrightarrow{DB}$. Расписывая это равенство в координатах, получаем

$$d_1 - a_1 = t(b_1 - d_1),\ d_2 - a_2 = t(b_2 - d_2) \text{ и } d_3 - a_3 = t(b_3 - d_3),$$

откуда

$$d_1 = \frac{a_1 + tb_1}{1+t} = c_1,\ d_2 = \frac{a_2 + tb_2}{1+t} = c_2 \text{ и } d_3 = \frac{a_3 + tb_3}{1+t} = c_3.$$

Следовательно, $D = C$.

3) Из равенства (3) вытекает, что направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Это означает, что точка C должна лежать на прямой AB. Как отмечалось выше, она не может совпадать с точкой B. Пусть теперь C — произвольная точка прямой AB, отличная от B. Тогда векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны и $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$. В силу критерия коллинеарности векторов существует такое число t, что выполнено равенство (3). □

Следующее наблюдение очевидно.

- *Пусть точка C делит отрезок AB в отношении t. Если C принадлежит отрезку AB и отлична от B, то $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{CB}$, и потому $t \geqslant 0$, а в противном случае $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, и потому $t < 0$.*

Координаты середины отрезка

Отметим один важный частный случай. Предположим, что C — середина отрезка AB. Как уже отмечалось выше, это означает, что она делит этот отрезок в отношении 1. В силу (4) получаем, что точка C имеет координаты

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Иными словами,

- *координаты середины отрезка есть полусумма координат его начала и конца.*

13.3. Замена системы координат

В оставшейся части параграфа рассматривается следующая задача: пусть в пространстве заданы две системы координат и известны координаты некоторой точки в одной из них. Требуется найти координаты той же точки в другой системе координат. Ту систему координат, в которой координаты точки известны, будем называть *старой*, а ту, в которой их надо найти, — *новой*. Ясно, что для того, чтобы решить задачу, надо знать, как связаны между собой старая и новая системы координат. Поэтому будем считать известными координаты начала новой системы координат в старой системе и координаты каждого из векторов, образующих базис новой системы координат, в базисе старой системы.

Пусть $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ — старая, а $(P; \vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — новая системы координат, (p_1, p_2, p_3) — координаты точки P в старой системе координат, а (t_{11}, t_{21}, t_{31}), (t_{12}, t_{22}, t_{32}) и (t_{13}, t_{23}, t_{33}) — координаты векторов $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ соответственно. Пусть, наконец, (x_1, x_2, x_3) — координаты точки M в старой системе координат. Требуется найти ее координаты в новой системе. Обозначим их через (x'_1, x'_2, x'_3).

Вычислим двумя способами вектор $\overrightarrow{OM}$. С одной стороны, $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$. С другой,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} &= (p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3) + (x_1'\vec{c}_1 + x_2'\vec{c}_2 + x_3'\vec{c}_3) = \\ &= p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3 + x_1'(t_{11}\vec{b}_1 + t_{21}\vec{b}_2 + t_{31}\vec{b}_3) + \\ &+ x_2'(t_{12}\vec{b}_1 + t_{22}\vec{b}_2 + t_{32}\vec{b}_3) + x_3'(t_{13}\vec{b}_1 + t_{23}\vec{b}_2 + t_{33}\vec{b}_3) = \\ &= (p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3')\vec{b}_1 + (p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3')\vec{b}_2 + \\ &+ (p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3')\vec{b}_3.\end{aligned}$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, с одной стороны, равны (x_1, x_2, x_3), а с другой, —

$$(p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3', p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3', p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3').$$

В силу единственности разложения вектора по базису в пространстве имеют место равенства

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3', \\ x_2 = p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3', \\ x_3 = p_3 + t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3'. \end{cases} \tag{5}$$

Эти равенства называются *формулами перехода от старой системы координат к новой* или *формулами замены системы координат*.

Аналогичные рассуждения показывают, что на плоскости формулы замены системы координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_{11}x_1' + t_{12}x_2', \\ x_2 = p_2 + t_{21}x_1' + t_{22}x_2'. \end{cases} \tag{6}$$

Для дальнейшего нам понадобится одно новое понятие.

Определение

Пусть числа t_{ij}, где $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, имеют прежний смысл. Матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода от старого базиса к новому*.

Иными словами,

- матрица перехода от базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ к базису $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — это матрица, в которой по столбцам стоят координаты векторов нового базиса в старом базисе.

Замечание 13.1

Матрица перехода от старого базиса к новому невырожденна.

Доказательство. В силу 1-го свойства определителей достаточно проверить, что $|T^\top| \neq 0$. В матрице $T^\top$ по строкам записаны координаты векторов $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ и $\vec{c}_3$ в старом базисе. Эти векторы некомпланарны, так как они образуют базис. В силу замечания 12.2 $|T^\top| \neq 0$. $\square$

С помощью матрицы перехода от одного базиса к другому можно записать формулы (5) более компактно. Положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

(черта над буквой P нужна для того, чтобы отличить матрицу $\overline{P}$ от точки P). Тогда формулы (5) можно записать в виде одного матричного равенства $X = \overline{P} + TX'$.

Формулы (5) позволяют найти координаты точки в старой системе координат (x_1, x_2 и x_3), если известны их координаты в новой системе (x_1', x_2' и x_3'). Между тем, исходная постановка задачи была прямо противоположной: по координатам точки в старой системе координат найти ее координаты в новой системе. Тем не менее, можно считать, что формулы (5) дают решение исходной задачи.

Для того, чтобы убедиться в этом, посмотрим на формулы (5) как на систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1', x_2', x_3':

$$\begin{cases} t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + t_{13}x_3' &= x_1 - p_1, \\ t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + t_{23}x_3' &= x_2 - p_2, \\ t_{31}x_1' + t_{32}x_2' + t_{33}x_3' &= x_3 - p_3. \end{cases} \tag{7}$$

(Эта точка зрения естественна, поскольку, в соответствии с исходной постановкой задачи, величины x_1', x_2' и x_3' неизвестны, а все остальные величины, входящие в систему (7), а именно, x_i, p_i, и t_{ij} для всех $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, — известны).

Матрицей системы (7) является матрица перехода от старого базиса к новому. В силу замечания 13.1 определитель этой матрицы не равен нулю. Согласно теореме Крамера, отсюда вытекает, что система (7) имеет единственное решение. Найдя это решение, мы найдем выражение координат точки M в новой системе координат через ее координаты в старой системе. Мы не будем приводить соответствующие формулы в общем виде, так как они выглядят довольно громоздко.

Рассмотрим важный частный случай формул (6). Предположим, что старая система координат на плоскости — прямоугольная декартова, а новая система координат получается из старой поворотом плоскости вокруг начала координат старой системы на некоторый угол α (см. рис. 2).

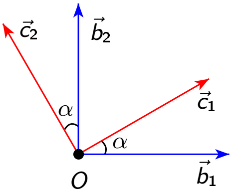

Рис. 2. Поворот системы координат

В частности, начало новой системы координат совпадает с началом старой системы, и потому $p_1 = p_2 = 0$. Нетрудно понять, что вектор $\vec{c}_1$ имеет в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а вектор $\vec{c}_2$ — координаты $\left(\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha), \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\right) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

Следовательно, формулы замены системы координат принимают вид

$$\begin{cases} x_1 &= x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha, \\ x_2 &= x_1' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

Эти формулы называются *формулами поворота системы координат на угол* α.

Отметим, что матрица перехода от старого базиса к новому имеет в данном случае вид

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Она называется *матрицей поворота системы координат на угол* α.