

# § 12. Смешанное произведение векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,  
Институт естественных наук и математики,  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

## 12.1. Определение и свойства смешанного произведения

### Определение

*Смешанным произведением* векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на вектор  $\vec{c}$ . Смешанное произведение векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  обозначается через  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  или  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ . Таким образом,  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ .

- Как и в случае со скалярным произведением, результатом смешанного произведения является число. Поэтому смешанное произведение не является алгебраической операцией на множестве всех векторов в смысле определения, данного в § 3.

Первым утверждением, показывающим полезность понятия смешанного произведения, является следующий факт.

## Предложение 12.1 (критерий компланарности векторов)

*Векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

**Доказательство. Необходимость.** Предположим, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны. Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , и потому  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$ . Пусть теперь  $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ . Отложим векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору  $\vec{c}$ . В силу критерия ортогональности  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$ .

**Достаточность.** Пусть  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ . Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то компланарность векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  очевидна. Пусть теперь  $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ . Отложим векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  от одной точки. По условию  $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$ . В силу критерия ортогональности вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  ортогонален вектору  $\vec{c}$ . Но вектор  $\vec{a} \times \vec{b}$  ортогонален плоскости  $\sigma$ , образованной векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Поскольку  $\vec{c}$  ортогонален этому вектору, то он лежит в  $\sigma$ . А это означает, что векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.  $\square$

# Геометрический смысл смешанного произведения (1)

Следующее утверждение указывает еще одно важное для приложений свойство смешанного произведения.

## Предложение 12.2 (геометрический смысл смешанного произведения)

*Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.*

**Доказательство.** Предположим сначала, что тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  — правая. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 1 на следующем слайде. Отложим векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  от некоторой точки  $O$ . Пусть точка  $C$  такова, что  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ , а  $D$  — проекция точки  $C$  на плоскость векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , которую мы обозначим через  $\pi$ . Угол между вектором  $\vec{c}$  и плоскостью  $\pi$  обозначим через  $\alpha$ , а угол между векторами  $\vec{a} \times \vec{b}$  и  $\vec{c}$  — через  $\beta$ . Поскольку тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  — правая, т. е. имеет ту же ориентацию, что и тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ , векторы  $\vec{c}$  и  $\vec{a} \times \vec{b}$  направлены в одну и ту же сторону от плоскости  $\pi$ . Следовательно,  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ , и потому  $\sin \alpha = \cos \beta$ . Используя геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$\begin{aligned} V &= S_{\text{осн}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \alpha = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}. \end{aligned}$$

## Геометрический смысл смешанного произведения (2)

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$ , и потому  $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ .

Предположим теперь, что тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  — левая. Тогда тройка  $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$  — правая. Но эти две тройки определяют один и тот же параллелепипед. В силу доказанного выше объем этого параллелепипеда равен  $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ .

Пользуясь свойствами векторного произведения, получаем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a})\vec{c} = -((\vec{b} \times \vec{a})\vec{c}) = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -V.$$

Следовательно,  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$ , и потому  $V = -\vec{a}\vec{b}\vec{c} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ . □

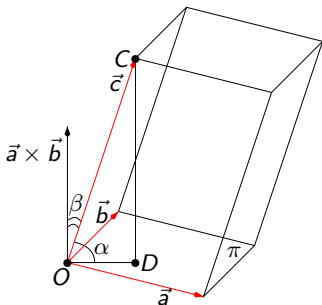


Рис. 1. Вычисление объема параллелепипеда

Из доказательства геометрического смысла смешанного произведения вытекает следующий факт, который объясняет, почему правая тройка векторов называется положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной.

## Замечание 12.1

*Тройка векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  является правой тогда и только тогда, когда их смешанное произведение больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.* □

Перечислим теперь алгебраические свойства смешанного произведения векторов.

## Свойства смешанного произведения

Если  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{d}$  — произвольные векторы, а  $t$  — произвольное число, то:

- 1)  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ ;
- 2)  $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ ;
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$  (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу*);
- 4)  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$  (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу*);
- 5)  $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$  (смешанное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

**Доказательство.** 1) Упорядоченные тройки  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  и  $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$  имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу геометрического смысла смешанного произведения, смешанные произведения  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  и  $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$  либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ . Равенство  $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$  проверено в процессе доказательства геометрического смысла смешанного произведения. Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично одному из этих двух.

2) Используя свойство 3) скалярного произведения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{c}) = t((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

Таким образом,  $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ . Используя это равенство и свойство 1) смешанного произведения, имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

Таким образом,  $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ . Равенство  $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$  проверяется аналогично предыдущему.



5) Используя свойство 2) скалярного произведения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано.

3) и 4) Используя свойства 1) и 5) смешанного произведения, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{d}\vec{a} + \vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Свойство 3) доказано. Свойство 4) доказывается аналогично. □

В § 11 было сформулировано, но не было доказано, свойство 2) векторного произведения. Оно состоит в том, что если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — произвольные векторы, а  $t$  — произвольное число, то  $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$ . Докажем это свойство. Пусть  $\vec{x}$  — произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного произведения и свойство 3) скалярного произведения, имеем

$$((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t\vec{a})\vec{b}\vec{x} = t(\vec{a}\vec{b}\vec{x}) = t((\vec{a} \times \vec{b})\vec{x}) = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}.$$

Таким образом,  $((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}$  для всякого вектора  $\vec{x}$ . В силу ослабленного закона сокращения для скалярного произведения (см. предложение 10.2), имеем  $(t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$ . Аналогично проверяется, что  $\vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$ . □

В §11 было также сформулировано, но не доказано, свойство 3) векторного произведения. Оно состоит в том, что если  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — произвольные векторы, то  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ . Докажем это свойство. Пусть  $\vec{x}$  — произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного произведения и свойство 2) скалярного произведения, имеем

$$\begin{aligned} ((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) \vec{x} &= (\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{x} = \vec{a} \vec{c} \vec{x} + \vec{b} \vec{c} \vec{x} = \\ &= (\vec{a} \times \vec{c}) \vec{x} + (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) \vec{x}. \end{aligned}$$

Итак,  $((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) \vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) \vec{x}$  для всякого вектора  $\vec{x}$ . Используя ослабленный закон сокращения для скалярного произведения, имеем  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ . □

## Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

### 12.2. Вычисление смешанного произведения в координатах

Пусть векторы  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  образуют базис пространства, а  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(y_1, y_2, y_3)$  и  $(z_1, z_2, z_3)$  — координаты векторов  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$  соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что если два из трех векторов равны, то смешанное произведение этих трех векторов равно нулю. Используя этот факт и свойство 1) смешанного произведения, получаем равенства

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3) \cdot \vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + \\ &+ (x_2y_3z_1) \cdot \vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2) \cdot \vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1) \cdot \vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1 = \\ &= (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3. \quad (1)$$

В отличие от ситуации со скалярным и векторным произведением, равенство (1) дает достаточно простую и легко запоминаемую формулу, связывающую смешанное произведение векторов с их координатами в произвольном базисе. Но и в этом случае мы не можем вычислить смешанное произведение, не зная смешанного произведения базисных векторов. Справедливо, однако, следующее полезное утверждение.

## Замечание 12.2

Пусть  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(y_1, y_2, y_3)$  и  $(z_1, z_2, z_3)$  — координаты векторов  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$  соответственно в некотором (произвольном) базисе. Векторы  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$  компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

**Доказательство.** Пусть  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  — базис, о котором идет речь в формулировке замечания. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что  $\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 \neq 0$ . Учитывая формулу (1), получаем, что  $\vec{x} \vec{y} \vec{z} = 0$  тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2). Остается еще раз сослаться на критерий компланарности векторов.

## Вычисление смешанного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Если базис  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  является правым ортонормированным, то  $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$  (см. формулы (1) в § 11), и потому

$$\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \vec{b}_3 = \vec{b}_3 \vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула (1) принимает совсем простой вид:

$$\vec{x} \vec{y} \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Пусть  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $(y_1, y_2, y_3)$  и  $(z_1, z_2, z_3)$  — координаты векторов  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$  соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.

Используя смешанное произведение, можно

- 1) вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$ : в силу (3) и геометрического смысла смешанного произведения верно равенство

$$V = \text{mod} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

(в этой формуле символ mod имеет тот же смысл, что и в формуле (6) из §11);

- 2) определить ориентацию тройки векторов  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ : из (3) и замечания 12.1 вытекает, что тройка  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

- положительно ориентирована тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0,$$

- отрицательно ориентирована тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0.$$