§ 10. Скалярное произведение векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

10.1. Определение и свойства скалярного произведения

Материал этого параграфа, как и предыдущего, по бóльшей части известен из школьного курса математики, но есть и некоторая новая информация.

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

В силу этого определения, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые, то

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \qquad (1)$$

- Скалярное произведение не является алгебраической операцией на множестве всех векторов в смысле определения, данного в § 3, так как его результатом является не вектор, а число. Тем не менее, мы будем называть его операцией над векторами (без прилагательного «алгебраическая»).

Определение

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$.

Поскольку $(\widehat{\vec{a},\vec{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, имеем

$$\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2. \qquad (2)$$

Иными словами,

- *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

Из сказанного вытекает, что $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

Критерий ортогональности векторов

Определение

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору. Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Предложение 10.1 (критерий ортогональности векторов)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению скалярного произведения. Если же $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то из ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вытекает, что $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$, и потому $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Но тогда вновь $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению скалярного произведения.

Достаточность. Если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то либо $|\vec{a}| = 0$ (т. е. $\vec{a} = \vec{0}$), либо $|\vec{b}| = 0$ (т. е. $\vec{b} = \vec{0}$), либо $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Во всех трех случаях $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\square$

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

Замечание 10.1

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является:

а) *острым тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} > 0$;*

б) *прямым тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$;*

в) *тупым тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} < 0$.*

Доказательство. Пункт б) — это не что иное, как критерий ортогональности векторов. Чтобы доказать пп. а) и в), заметим, что, в силу формулы (1), знак косинуса угла между ненулевыми векторами совпадает со знаком их скалярного произведения. Остается учесть, что косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла отрицателен. $\square$

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$, *причем* $\vec{a}\vec{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$.

Мы не приводим доказательств этих свойств, поскольку они известны из школьного курса математики. Отметим только, что свойство 4) следует из равенства (2).

Если x, y и z — элементы произвольного поля такие, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *законом сокращения*. На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Действительно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два различных вектора, а $\vec{c}$ — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В силу критерия ортогональности векторов $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Тем не менее, имеет место следующее свойство скалярного произведения.

Предложение 10.2 (ослабленный закон сокращения для скалярного произведения)

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ для любого $\vec{x}$. Тогда $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Поскольку вектор $\vec{x}$ может быть любым, возьмем в качестве $\vec{x}$ вектор $\vec{a} - \vec{b}$. Получим равенство $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. По свойству 4) скалярного произведения отсюда следует, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$. □

10.2. Вычисление скалярного произведения в координатах

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $(\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3})$ координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно. Используя свойства скалярного произведения, получаем, что

$$\begin{aligned}
\vec{a}\vec{b} &= (t_1\vec{c_1} + t_2\vec{c_2} + t_3\vec{c_3})(s_1\vec{c_1} + s_2\vec{c_2} + s_3\vec{c_3}) = \\
&= (t_1 s_1)\vec{c_1}\vec{c_1} + (t_1 s_2)\vec{c_1}\vec{c_2} + (t_1 s_3)\vec{c_1}\vec{c_3} + \\
&+ (t_2 s_1)\vec{c_2}\vec{c_1} + (t_2 s_2)\vec{c_2}\vec{c_2} + (t_2 s_3)\vec{c_2}\vec{c_3} + \\
&+ (t_3 s_1)\vec{c_3}\vec{c_1} + (t_3 s_2)\vec{c_3}\vec{c_2} + (t_3 s_3)\vec{c_3}\vec{c_3}.
\end{aligned}$$

Это выражение можно несколько упростить, воспользовавшись коммутативностью скалярного произведения, но оно все равно останется громоздким и, главное, все равно не позволит вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ без дополнительной информации о скалярных произведениях базисных векторов.

Вычисление скалярного произведения в координатах (в ортонормированном базисе)

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Поэтому формула из предыдущего слайда принимает вид

$$\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3. \tag{3}$$

Иными словами,

- *в случае ортонормированного базиса скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

В частности,

$$\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2. \tag{4}$$

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно

1) вычислить длину вектора: в силу формулы (4)

$$|\vec{a}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}; \tag{5}$$

2) вычислить косинус угла между ненулевыми векторами: в силу формул (1), (3) и (5)

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}};$$

3) определить, будет ли угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острым, прямым или тупым: в силу замечания 10.1 и формулы (3) этот угол является
   - острым тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 > 0$;
   - прямым тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 = 0$;
   - тупым тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 < 0$.

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) и к векторам на плоскости. В частности, если векторы на плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

- $\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2$;
- $|\vec{a}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$;
- $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$;
- угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является
  - острым тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 > 0$;
  - прямым тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 = 0$;
  - тупым тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 < 0$.