Глава III. Векторная алгебра

§ 9. Линейные операции над векторами

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

9.1. Направленные отрезки и векторы

Содержание этого параграфа в значительной степени повторяет соответствующие темы школьного курса математики, но имеются и некоторые отличия. Основное из них состоит в способе введения понятия вектора.

Определения

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $|\overrightarrow{AB}|$. Если $A = B$, то отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$. Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* к $\overrightarrow{AB}$.

- В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позже.

Коллинеарные направленные отрезки

Определение

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Нулевой направленный отрезок по определению коллинеарен любому другому. Тот факт, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, обозначается через $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

- Термин «коллинеарность» происходит от английских слов «common linear» т. е. «общая линия».

Определения

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *сонаправленными* (или *имеющими одно и то же направление*), если выполнено одно из следующих двух условий:

(i) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на параллельных прямых, и точки B и D расположены по одну сторону от прямой AC;

(ii) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной и той же прямой ℓ, и отрезок $\overrightarrow{AB}$ сонаправлен с отрезком $\overrightarrow{C'D'}$, который лежит на прямой ℓ', параллельной ℓ, и получен параллельным сдвигом отрезка $\overrightarrow{CD}$.

Ненулевые направленные отрезки называются *противонаправленными* (или *имеющими противоположные направления*), если они коллинеарны и не сонаправлены. Нулевой направленный отрезок по определению сонаправлен и противонаправлен любому другому. Тот факт, что направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены [противонаправлены], обозначается через $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ [соответственно, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$].

Определение сонаправленных отрезков иллюстрирует рис. 1, на котором слева изображен случай (i), а справа — случай (ii).

Сонаправленные отрезки (рисунок)

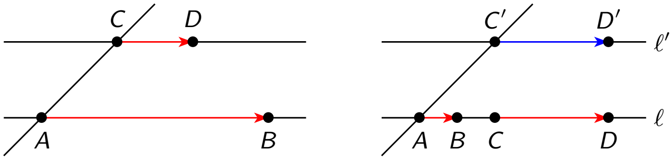

Рис. 1. Сонаправленные отрезки

Понятие вектора (1)

Определения

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление. Направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется *изображением вектора*.

Все изображения данного вектора имеют одну и ту же длину. Это делает корректным следующее

Определение

Длиной (или *модулем*) *вектора* называется длина любого его изображения.

Понятие вектора (2)

Определение

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т. е. состоят из одних и тех же направленных отрезков.

Допуская вольность речи, говорят, что

- *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.*

Очевидно, что для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке A. Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки A*.

Определение

Два вектора называются *коллинеарными* [*сонаправленными*, *антинаправленными*], если их изображения коллинеарны [сонаправленны, антинаправленны]. Антинаправленные векторы называют также *противонаправленными*.

Для обозначения понятий, сформулированных в определении, применяются те же символы, что и для обозначения соответствующих понятий в случае направленных отрезков: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определения

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является изображением вектора $\vec{a}$, то вектор, изображением которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$. Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Из данных выше определений вытекает, что

- нулевой вектор коллинеарен, сонаправлен и антинаправлен с любым другим вектором.

9.2. Определение и свойства линейных операций

Определение

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку O, отложим от нее вектор $\vec{a}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через A. От точки A отложим вектор $\vec{b}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через B. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ изображает вектор, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 2). Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}+\vec{b}$.

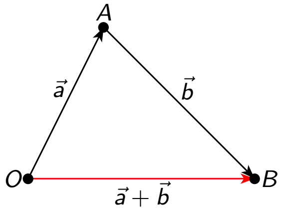

Рис. 2. Сумма векторов

Замечание 9.1

Определение суммы векторов корректно, т. е. не зависит от выбора начальной точки O.

Более точно, если мы в качестве O возьмем другую точку P и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, который сонаправлен отрезку $\overrightarrow{OB}$ и имеет с ним одинаковую длину (см. рис. 3). Следовательно, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{PR}$ — изображения одного и того же вектора.

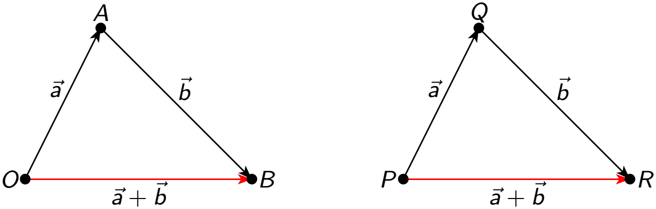

Рис. 3. Корректность определения суммы векторов

Сумму векторов можно определить и по-другому. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной и той же точки O. Концы полученных направленных отрезков обозначим через A и B соответственно, а четвертую вершину параллелограмма со сторонами OA и OB — через M. Тогда вектор, соответствующий направленному отрезку $\overrightarrow{OM}$, будет равен $\vec{a}+\vec{b}$ (см. рис. 4, на котором слева вектор $\vec{a}+\vec{b}$ построен по определению, а справа — описанным только что способом). Заметим, однако, что этот способ построения суммы векторов применим только к неколлинеарным векторам.

Рис. 4. Два способа определения суммы векторов

Свойства суммы векторов

Следующие свойства суммы векторов известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства суммы векторов

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы, то:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*сложение векторов* ***коммутативно***);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*сложение векторов* ***ассоциативно***);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Эти свойства показывают, что справедливо следующее утверждение.

Замечание 9.2

Множество всех векторов с операцией сложения является абелевой группой. □

Нейтральным элементом этой группы является вектор $\vec{0}$, а элементом, обратным к вектору $\vec{a}$, — вектор $-\vec{a}$.

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* t называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

1) $|t\vec{a}| = |t| \cdot |\vec{a}|$;
2) если $t \geqslant 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$, а если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число часто объединяют термином *линейные операции над векторами*.

Из определения операции умножения вектора на число с очевидностью вытекает, что $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Следующие свойства произведения вектора на число известны из школьного курса и легко проверяются исходя из определения операции, поэтому мы их не доказываем.

Свойства произведения вектора на число

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, а t и s — произвольные числа, то:

1) $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a}+t\vec{b}$ (*умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения векторов*);
2) $(t+s)\vec{a} = t\vec{a}+s\vec{a}$ (*умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел*);
3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$;
4) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$. $\square$

Орт вектора

Определение

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор. *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

При решении некоторых задач возникает необходимость найти орт данного вектора. В следующем замечании указано, как это можно сделать.

Замечание 9.3

Если $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.

Доказательство. Поскольку $\frac{1}{|\vec{a}|} > 0$, из определения произведения вектора на число вытекает, что векторы $\vec{a}$ и $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ сонаправленны. Вновь используя определение произведения вектора на число, имеем

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Следовательно, вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ действительно является ортом вектора $\vec{a}$. $\square$

Определение

Переход от ненулевого вектора к его орту называется *нормированием* вектора.

Критерий коллинеарности векторов (1)

Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Предложение 9.1 (критерий коллинеарности векторов)

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, причем $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.

Доказательство. *Достаточность* непосредственно вытекает из определения произведения вектора на число.

Необходимость. По условию $|\vec{b}| \neq 0$. Поскольку $\vec{a} \parallel \vec{b}$, получаем, что либо $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, либо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Положим

$$t = \begin{cases} \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \upuparrows \vec{b}, \\ -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $t > 0$, и потому $t\vec{b} \upuparrows \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Таким образом, в любом случае векторы $\vec{a}$ и $t\vec{b}$ сонаправленны. Кроме того,

$$|t\vec{b}| = |t| \cdot |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}| = |\vec{a}|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$. $\square$

Критерий коллинеарности векторов легко переформулировать так, чтобы в его посылке не было никаких ограничений на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 9.1′ (критерий коллинеарности векторов, альтернативная формулировка)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число t такое, что либо $\vec{a} = t\vec{b}$, либо $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отличен от $\vec{0}$, то достаточно сослаться на критерий коллинеарности векторов в его стандартной формулировке. Если же $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, то для любого t выполнены оба равенства $\vec{a} = t\vec{b}$ и $\vec{b} = t\vec{a}$. $\square$

Альтернативная формулировка критерия коллинеарности векторов оказывается неудобной для применения. Поэтому в дальнейшем мы, не оговаривая этого в явном виде, практически всегда будем ссылаться на ту формулировку этого критерия, которая дана на предыдущем слайде.

9.3. Базис на плоскости и в пространстве

Определение

Базисом плоскости называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b})$.

Поскольку нулевой вектор по определению коллинеарен любому другому, получаем простое, но принципиально важное

Замечание 9.4

Нулевой вектор не может входить в базис плоскости. $\square$

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса на плоскости, является следующая

Теорема 9.1 (теорема о разложении вектора по базису на плоскости)

Пусть $(\vec{a}, \vec{b})$ *— базис некоторой плоскости, а* $\vec{x}$ *— вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1 *и* t_2 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}. \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующем слайде.

Определение

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b})$. Коэффициенты t_1, t_2 разложения (1) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ координаты t_1, t_2, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2)$.

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B и M соответственно (см. рис. 5 на следующем слайде). Спроектируем точку M на прямую OA параллельно прямой OB и на прямую OB параллельно прямой OA. Обозначим полученные точки через A' и B' соответственно и положим $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$ и $\vec{b}' = \overrightarrow{OB'}$. Ясно, что $\vec{a}' \parallel \vec{a}$ и $\vec{b}' \parallel \vec{b}$. Поскольку $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ (см. замечание 9.4), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{a}' = t_1\vec{a}$ и $\vec{b}' = t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Тогда $\vec{x} = \vec{a}' + \vec{b}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$.

Существование чисел t_1 и t_2 с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b}$ для некоторых чисел s_1 и s_2. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (1), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b}$. Но тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по критерию коллинеарности векторов, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$. $\square$

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису на плоскости (рисунок)

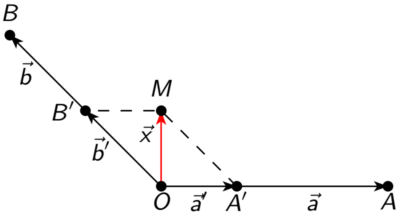

Рис. 5. Разложение вектора по базису на плоскости

Определения

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости. *Базисом пространства* называется произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Ясно, что если один из векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — нулевой, то эти векторы компланарны. Следовательно, справедливо следующее замечание, аналогичное замечанию 9.4.

Замечание 9.5

Нулевой вектор не может входить в базис пространства. □

Ключевым результатом, связанным с понятием базиса в пространстве, является следующая теорема, аналогичная теореме о разложении вектора по базису на плоскости.

Теорема 9.2 (теорема о разложении вектора по базису в пространстве)

Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *— базис пространства, а* $\vec{x}$ *— произвольный вектор. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1, t_2 *и* t_3 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено на следующих двух слайдах.

Определение

Равенство (2) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Коэффициенты t_1, t_2, t_3 разложения (2) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты t_1, t_2, t_3, записывается в виде $\vec{x} = (t_1, t_2, t_3)$.

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B, C и M соответственно (см. рис. 6 на следующем слайде). Поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны (в противном случае векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были бы компланарными и не образовывали бы базиса пространства), существует единственная плоскость π, проходящая через точки O, A и B. Спроектируем точку M на плоскость π параллельно прямой OC и на прямую OC параллельно плоскости π. Обозначим полученные точки через M' и C' соответственно и положим $\vec{x}\,' = \overrightarrow{OM'}$ и $\vec{c}\,' = \overrightarrow{OC'}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{x}\,' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Далее, ясно, что $\vec{c}\,' \parallel \vec{c}$. Поскольку $\vec{c} \neq \vec{0}$ (см. замечание 9.5), из критерия коллинеарности векторов вытекает, что $\vec{c}\,' = t_3\vec{c}$ для некоторого числа t_3. Тогда $\vec{x} = \vec{x}\,' + \vec{c}\,' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$.

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису в пространстве (2)

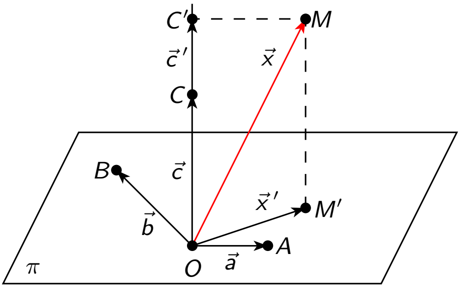

Рис. 6. Разложение вектора по базису в пространстве

Существование чисел t_1, t_2 и t_3 с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность. Предположим, что $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$ для некоторых чисел s_1, s_2 и s_3. Вычитая это равенство из уже доказанного равенства (2), имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$. Но тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$. $\square$

Замечание 9.6

Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в одном и том же базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_3, y_3) соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\vec{x} + \vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты (tx_1, tx_2, tx_3). Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.

Доказательство. По определению координат вектора в пространстве имеют место равенства $\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$ и $\vec{y} = y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}$. Следовательно,

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}) + (y_1\vec{a} + y_2\vec{b} + y_3\vec{c}) =$$
$$= (x_1 + y_1)\vec{a} + (x_2 + y_2)\vec{b} + (x_3 + y_3)\vec{c},$$
$$t\vec{x} = t(x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}) = (tx_1)\vec{a} + (tx_2)\vec{b} + (tx_3)\vec{c}.$$

Остается сослаться на определение координат вектора в пространстве. В случае плоскости доказательство абсолютно аналогично. $\square$