

§ 8. Крамеровские системы линейных уравнений

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если в ней число уравнений равно числу неизвестных.

Крамеровские системы получили название в честь швейцарского математика XVIII века Габриэля Крамера, который изучал их.

Поскольку, как мы увидим ниже, исследование крамеровских систем линейных уравнений неразрывно связано с рассмотрением определителей, *всюду далее в данном пособии, за исключением тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, при рассмотрении крамеровских систем линейных уравнений предполагается, что речь идет о системах уравнений над полем, характеристика которого отлична от 2.*

Теорема Крамера (1)

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 8.1 (теорема Крамера)

Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Эту теорему часто называют также *правилом Крамера*.

Доказательство. Пусть $\Delta \neq 0$. Докажем сначала *существование* решения системы (1). Для этого достаточно убедиться в том, что набор скаляров

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right) \quad (2)$$

является решением системы, т. е. обращает все ее уравнения в верные равенства. Подставим этот набор в левую часть первого уравнения системы. Получим выражение

$$a_{11} \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta} + a_{12} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta} + \dots + a_{1n} \cdot \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\text{если } (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \text{ — решение системы (1),} \\ &\text{то } \Delta x_1^0 = \Delta_1, \Delta x_2^0 = \Delta_2, \dots, \Delta x_n^0 = \Delta_n. \end{aligned} \quad (3)$$

- Условие $\Delta \neq 0$ в доказательстве утверждения (3) не использовалось. Таким образом, *это утверждение справедливо при любом Δ .*

Поскольку $\Delta \neq 0$, получаем, что

$$x_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n^0 = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Итак, мы взяли произвольное решение и доказали, что оно совпадает с решением (2). Следовательно, решение единственно. Теорема Крамера доказана. □

Следствия из теоремы Крамера (1)

Укажем два следствия из теоремы Крамера. Из (3) непосредственно вытекает

Следствие 8.1

Если $\Delta = 0$, а по крайней мере один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличен от 0, то система (1) не имеет решений. \square

Определение

Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее определитель равен 0, и *невырожденной*, если он не равен 0.

Следствие 8.2

Крамеровская система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица невырожденна.

Доказательство. *Достаточность* вытекает из теоремы Крамера.

Необходимость. Предположим, что $\Delta = 0$ и система (1) совместна. Надо проверить, что в этом случае система (1) является неопределенной. В силу п. 2) теоремы 5.1 достаточно проверить, что однородная система, соответствующая системе (1), неопределенна.

Следствия из теоремы Крамера (2)

Приведем основную матрицу этой системы к ступенчатому виду, не вычеркивая при этом нулевые строки (в случае их появления). Полученная ступенчатая матрица будет квадратной матрицей порядка n . Обозначим ее через B и положим $B = (b_{ij})$. Из 2-го и 4-го свойств определителей вытекает, что $|B| = k \cdot \Delta$ для некоторого $k \neq 0$, а значит $|B| = 0$.

Докажем, что последняя строка матрицы B является нулевой.

Предположим, что это не так. В силу замечания 7.1 матрица B верхнетреугольна. Следовательно, $b_{nj} = 0$ для всех $j < n$, и потому $b_{nn} \neq 0$. Поскольку матрица B ступенчатая, существует такой индекс $i < n$, что $b_{n-1i} \neq 0$. В то же время, $b_{n-1j} = 0$ для всякого $j < n - 1$, поскольку матрица B верхнетреугольна. Следовательно, $i = n - 1$, т.е. $b_{n-1n-1} \neq 0$. Аналогично проверяется, что все диагональные элементы матрицы B отличны от 0. В силу предложения 7.11 $|B| = b_{11}b_{22} \cdots b_{nn} \neq 0$ вопреки сказанному выше.

Итак, последняя строка матрицы B — нулевая. Следовательно, число ненулевых строк матрицы B меньше n . В силу замечания 6.3 это означает, что система является неопределенной. \square

Еще одно следствие из теоремы Крамера относится к крамеровским однородным системам.

Следствие 8.3

Крамеровская однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее основная матрица вырождена.

Доказательство. *Необходимость.* Если крамеровская однородная система имеет ненулевое решение, то она имеет более одного решения (так как нулевое решение у нее есть всегда). Но тогда $\Delta = 0$ в силу теоремы Крамера.

Достаточность. Пусть $\Delta = 0$. В силу следствия 8.2 наша система не может иметь единственного решения. Несовместной она тоже быть не может, поскольку любая однородная система совместна (см. замечание 5.1). Следовательно, наша система имеет более одного решения. Ясно, что все эти решения, кроме одного, — ненулевые. \square

Случай $\Delta = \Delta_1 = \dots = \Delta_n = 0$

Теорема Крамера и следствия из нее ничего не говорят о случае, когда $\Delta = \Delta_1 = \dots = \Delta_n = 0$. Поскольку при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное решение, а в случае, когда $\Delta = 0$, а по крайней мере один из определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ отличен от 0, система не имеет решений, может показаться логичным предположение, что при $\Delta = \Delta_1 = \dots = \Delta_n = 0$ реализуется третья возможность: система имеет более одного решения (а в случае бесконечного поля — бесконечно много решений). Это, однако, не так: как показывает следующий пример, в обсуждаемом случае система может иметь более одного решения, но может и не иметь решений.

Пример 8.1

Рассмотрим две крамеровские системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

В каждой из них $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ (поскольку все эти определители содержат два одинаковых столбца), но первая система равносильна одному уравнению $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, и потому имеет более одного решения, а вторая, очевидно, несовместна.

