§ 7. Определители

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

7.1. Определение определителя. Определители малых порядков

Напомним, что если $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначается число инверсий в этой перестановке. Множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначается через S_n.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем F. *Определителем* (или *детерминантом*) матрицы A называется скаляр, который обозначается через $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле

$$|A| = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \qquad (1)$$

Таким образом, определитель матрицы A равен алгебраической сумме $n!$ слагаемых, каждое из которых есть произведение n элементов матрицы, по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Слагаемое $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ в правой части равенства (1) берется со знаком плюс, если перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четна, и со знаком минус, если эта перестановка нечетна. Из следствия 2.2 вытекает, что если $n \geqslant 2$, то половина слагаемых берется со знаком плюс, а половина — со знаком минус.

Для удобства изложения договоримся называть элементами, строками, столбцами и порядком определителя квадратной матрицы A, соответственно, элементы, строки, столбцы и порядок этой матрицы. Посмотрим, к чему приводит определение, данное на предыдущем слайде, при $n = 1, 2, 3$.

Определители 1-го порядка. Пусть $A = (a_{11})$ — квадратная матрица 1-го порядка. На множестве $\{1\}$ существует только одна перестановка, а именно — тривиальная перестановка (1). Число инверсий в этой перестановке равно 0, следовательно она четна. В силу формулы (1) имеем: $|A| = a_{11}$. Иными словами,

- *определитель 1-го порядка равен единственному элементу соответствующей матрицы.*

Определение

Если $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ образуют ее *побочную диагональ*.

В следующей матрице побочная диагональ выделена красным цветом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \ldots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определители 2-го порядка. Пусть $A=(a_{ij})$ — квадратная матрица 2-го порядка. На множестве $\{1,2\}$ существует ровно две перестановки: $(1,2)$ и $(2,1)$. Первая из них четна (число инверсий равно 0), вторая нечетна (число инверсий равно 1). Следовательно, $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Таким образом,

- *определитель второго порядка равен произведению элементов на главной диагонали соответствующей матрицы минус произведение элементов на ее побочной диагонали.*

Определители 3-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица 3-го порядка. На множестве $\{1, 2, 3\}$ существует $3! = 6$ перестановок:

$(1, 2, 3)$ — 0 инверсий, перестановка четна,

$(1, 3, 2)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна,

$(2, 1, 3)$ — 1 инверсия, перестановка нечетна,

$(2, 3, 1)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 1, 2)$ — 2 инверсии, перестановка четна,

$(3, 2, 1)$ — 3 инверсии, перестановка нечетна.

Следовательно,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит весьма громоздко. На следующем слайде мы укажем правило, позволяющее ее запомнить. Чтобы его сформулировать, заметим, что определитель 3-го порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три — со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На рис. 1 изображены два экземпляра определителя квадратной матрицы 3-го порядка. Элементы матрицы изображены точками.

Линии соединяют те элементы, которые при вычислении определителя перемножаются, при этом красным цветом соединены элементы, произведение которых подсчитывается со знаком плюс, а синим — элементы, произведение которых подсчитывается со знаком минус.

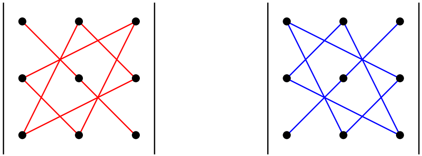

Рис. 1. Правило треугольников

Мы видим, что справедливо следующее

Правило треугольников

При вычислении определителя 3-го порядка со знаком плюс берется произведение элементов, образующих главную диагональ соответствующей матрицы, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус — произведение элементов, образующих побочную диагональ, а также элементов, образующих равнобедренные треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали.

7.2. Подстановки и перестановки

Понятие определителя можно ввести несколько иначе, чем было сделано выше. Это будет сделано на следующем слайде. Чтобы сформулировать «альтернативное» определение, заметим, что между множеством всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством всех подстановок на этом множестве существует очевидная биекция, которая перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ ставит в соответствие подстановку σ, определяемую правилом: $\sigma(k) = i_k$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$. Эту подстановку часто записывают в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}.$$

Эта подстановка называется *четной* [*нечетной*], если четна [нечетна] перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Для всякой подстановки σ положим

$$(-1)^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ четна}, \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетна}. \end{cases}$$

Очевидно, что определение определителя, даваемое формулой (1), эквивалентно следующему определению.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n над полем F. *Определителем* (или *детерминантом*) матрицы A называется скаляр, который обозначается через $|A|$ или $\det A$ и вычисляется по формуле

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Транспозиции как частный случай подстановок

Прежде чем переходить к изложению свойств определителей, докажем некоторые вспомогательные утверждения. Для этого нам понадобится следующее понятие.

Подстановка τ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется *транспозицией*, если найдутся $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ такие, что $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ и $\tau(k) = k$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$, отличного от i и j. Такая транспозиция обозначается через (ij). Связь между транспозициями в смысле введенного только что определения и транспозициями в смысле определения, данного в § 2, очевидна: транспозиция (ij) в «новом смысле» соответствует применению к тождественной перестановке $(1, 2, \ldots, n)$ транспозиции в «старом смысле», меняющей местами числа i и j.

Предложение 7.1

Произвольная подстановка σ является произведением конечного числа транспозиций. Если подстановка σ является произведением m транспозиций, то σ [не]четна тогда и только тогда, когда число m [не]четно.

Доказательство. Пусть

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 2.1 существует последовательность перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, начинающаяся с тождественной перестановки $\varepsilon = (1, 2, \dots, n)$ и содержащая все перестановки на этом множестве, в которой каждая следующая перестановка получается из предыдущей транспозицией пары символов. Рассмотрим часть этой последовательности перестановок от тождественной перестановки до перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Обозначим перестановки, возникающие в этой части исходной последовательности перестановок через $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$. В частности, $\xi_0 = \varepsilon$ и $\xi_m = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. Для всякого $k = 1, 2, \dots, m$, перестановка ξ_k получается из ξ_{k-1} транспозицией какой-то пары символов. Обозначим эти символы через r_k и s_k.

Обозначим через τ_k транспозицию $(r_k s_k)$ (здесь уже транспозиция понимается как частный случай подстановки). Ясно, что $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$. Первое утверждение предложения доказано. Чтобы доказать второе, заметим, что, в силу предложения 2.2, четные и нечетные перестановки в последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m$ чередуются. Перестановка $\xi_0 = \varepsilon$ четна. Поэтому перестановка $\xi_m = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ четна, если m четно, и нечетна, если m нечетно. □

Любая подстановка является инъекцией, и потому существует обратная к ней подстановка.

Следствие 7.1

Если подстановка σ [не]четна, то и подстановка σ^{-1} [не]четна.

Доказательство. В силу предложения 7.1 $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$ для некоторых транспозиций $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$. Ясно, что если τ — произвольная транспозиция, то τ^2 — тождественное отображение. Это означает, что $\tau^{-1} = \tau$. Следовательно, $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1}\tau_{m-1}^{-1}\cdots\tau_1^{-1} = \tau_m\tau_{m-1}\cdots\tau_1$. Таким образом, σ^{-1} является произведением m транспозиций. Из предложения 7.1 вытекает, что каждая из подстановок σ и σ^{-1} четна, если четно число m, и нечетна, если это число нечетно. □

7.3. Свойства определителей

Введем одно важное для дальнейшего понятие.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. Матрицей, *транспонированной* к A, называется матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times m$, определяемая равенством $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$. Иными словами, матрица B получается из A заменой строк на столбцы: первая строка матрицы A становится первым столбцом матрицы B, вторая строка матрицы A — вторым столбцом матрицы B и т. д. Матрица, транспонированная к A, обозначается через $A^{\top}$.

Очевидно, что

- матрица, транспонированная к квадратной матрице, является квадратной матрицей того же порядка, что и исходная матрица.

Отметим, что транспонирование матрицы является унарной операцией на множестве всех матриц.

Свойства операции транспонирования

Пусть A и B — матрицы над (одним и тем же) кольцом R, а $t \in R$. Тогда:

1) $(A^\top)^\top = A$;
2) *если матрицы A и B имеют один и тот же размер, то* $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
3) $(tA)^\top = tA^\top$;
4) *если произведение матриц AB определено, то* $(AB)^\top = B^\top A^\top$. $\square$

Мы не будем доказывать эти свойства, поскольку они непосредственно вытекают из определений операций.

Свойства 1) и 4) показывают, что операция транспонирования матрицы близка по своим свойствам к операции взятия обратного элемента в группоиде.

Перейдем к изложению свойств определителей.

Предложение 7.2 (1-е свойство определителей)

При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n. Положим $A^\top = (b_{ij})$. Таким образом, $b_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Определитель каждой из матриц A и $A^\top$ является алгебраической суммой $n!$ слагаемых. Рассмотрим отображение из множества всех слагаемых, алгебраической суммой которых является $|A|$, в множество всех слагаемых, алгебраической суммой которых является $|A^\top|$, которое переводит слагаемое $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ в слагаемое $b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n}$. Ясно, что это отображение биективно, и что указанные сомножители равны. Остается убедиться в том, что они входят в соответствующие определители с одним и тем же знаком. Переставим в произведении $b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n}$ сомножители так, чтобы первые индексы шли в возрастающем порядке от 1 до n. Получим произведение вида $b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$ для некоторой перестановки $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Рассмотрим подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \text{ и } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Легко понять, что они обратны друг к другу. В самом деле, пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $\sigma(k) = i_k$ и $\tau(i_k) = k$. Следовательно, $(\sigma\tau)(k) = \tau(\sigma(k)) = \tau(i_k) = k$. Иными словами, перестановка $\sigma\tau$ тождественна, и потому $\tau = \sigma^{-1}$. В силу следствия 7.1 подстановки σ и τ либо обе четны, либо обе нечетны. Следовательно, перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ также либо обе четны, либо обе нечетны, и потому знаки перед слагаемым $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ в $|A|$ и слагаемым $b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}$ в $|A^\top|$ совпадают. $\square$

Принцип равноправия строк и столбцов

Из инвариантности определителя относительно транспонирования вытекает следующий неформальный

Принцип равноправия строк и столбцов

Любое свойство определителей, формулируемое в терминах строк матрицы, останется справедливым, если слово «строка» заменить словом «столбец».

!! С учетом этого принципа, *все последующие свойства определителей формулируются только для строк, но использоваться будут как для строк, так и для столбцов.*

Во всех последующих свойствах определителей $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица произвольного порядка n над полем F. Некоторые свойства определителей (5-е и те, в доказательствах которых оно прямо или косвенно используется) неверны для матриц над полем характеристики 2. Во избежание недоразумений, *всюду далее в данном курсе лекций, за исключением тех случаев, когда в явном виде оговорено противное, при рассмотрении определителей предполагается, что речь идет о матрицах над полем, характеристика которого отлична от* 2.

Предложение 7.3 (2-е свойство определителей)

Если все элементы некоторой строки матрицы A умножить на один и тот же скаляр, то ее определитель умножится на тот же самый скаляр.

Доказательство. Предположим, что мы умножаем k-ю строку матрицы на скаляр t. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда

$$|A'| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\,i_{k-1}} (ta_{ki_k}) a_{k+1\,i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= t \cdot \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = t|A|,$$

что и требовалось доказать.

Поскольку умножение матрицы на скаляр равносильно умножению каждой строки матрицы на этот скаляр, из 2-го свойства определителей вытекает

Следствие 7.2

Если A — квадратная матрица порядка n, а t — произвольный скаляр, то $|tA| = t^n \cdot |A|$. □

Применяя 2-е свойство определителей в случае, когда строка умножается на 0, немедленно получаем

Предложение 7.4 (3-е свойство определителей)

Если матрица A содержит нулевую строку, то ее определитель равен 0. □

Предложение 7.5 (4-е свойство определителей)

Если две строки матрицы A поменять местами, то ее определитель умножится на -1.

Доказательство. Предположим, что мы поменяли местами k-ю и m-ю строки матрицы A, причем $k < m$. Обозначим полученную матрицу через A'. Тогда при переходе от $|A|$ к $|A'|$ всякое слагаемое вида

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a_{ki_k} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{m-1\, i_{m-1}} a_{mi_m} a_{m+1\, i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

заменится на равное ему по модулю слагаемое

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a_{mi_m} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{m-1\, i_{m-1}} a_{ki_k} a_{m+1\, i_{m+1}} \cdots a_{ni_n}$$

(оба раза мы указали слагаемые без знаков). Перестановка

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_m, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_k, i_{m+1}, \ldots, i_n)$$

получается из перестановки

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_{m-1}, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n)$$

транспозицией символов i_k и i_m. В силу предложения 2.2 эти транспозиции имеют разную четность. Следовательно, указанные выше слагаемые входят в выражения для $|A|$ и $|A'|$ с разными знаками, и потому $|A'| = -|A|$.

Предложение 7.6 (5-е свойство определителей)

Если матрица A содержит две одинаковые строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. Положим $d = |A|$. После перестановки двух равных строк местами определитель умножится на -1 (в силу предыдущего свойства), но не изменится (что очевидно). Следовательно, $d = -d$, т. е. $2d = 0$. В силу замечания 3.3 это означает, что $\operatorname{char} F = 2$. Но это противоречит нашей договоренности о характеристике поля F. $\square$

Из 2-го и 5-го свойств определителей вытекает

Следствие 7.3

Если матрица A содержит две пропорциональные строки, то ее определитель равен 0.

Доказательство. Предположим, что в матрице A i-я строка равна j-й строке, умноженной на t. Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее i-й строки на j-ю. Используя сначала 2-е, а затем 5-е свойство определителей, имеем $|A| = t|A'| = t \cdot 0 = 0$. $\square$

Предложение 7.7 (6-е свойство определителей)

Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых, то ее определитель равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых элементы этой строки равны первым слагаемым, а во второй — вторым слагаемым, а все остальные строки в обеих матрицах — те же, что и в исходной матрице.

Доказательство. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{k1} + a''_{k1} & a'_{k2} + a''_{k2} & \ldots & a'_{kn} + a''_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{k1} & a'_{k2} & \ldots & a'_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a''_{k1} & a''_{k2} & \ldots & a''_{kn} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Требуется доказать, что $|A| = |B| + |C|$.

Действительно,

$$|A| = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} (a'_{ki_k} + a''_{ki_k}) a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a'_{ki_k} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{I(i_1,i_2,\ldots,i_n)} a_{1i_1} \cdots a_{k-1\, i_{k-1}} a''_{ki_k} a_{k+1\, i_{k+1}} \cdots a_{ni_n} =$$

$$= |B| + |C|.$$

Свойство доказано. $\square$

Предложение 7.8 (7-е свойство определителей)

Если к некоторой строке матрицы A прибавить другую ее строку, умноженную на некоторый скаляр, то определитель матрицы не изменится.

Доказательство. Обозначим через A' матрицу, полученную прибавлением к k-й строке матрицы A ее m-й строки, умноженной на скаляр t. Используя 6-е свойство определителей и следствие 7.3, имеем

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+ta_{m1} & a_{k2}+ta_{m2} & \dots & a_{kn}+ta_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ta_{m1} & ta_{m2} & \dots & ta_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|.$$

Свойство доказано.

Разложение определителя по строке: формулировка

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Определитель квадратной матрицы $(n-1)$-го порядка, получающейся при вычеркивании из матрицы A i-й строки и j-го столбца, называется *минором элемента* a_{ij} и обозначается через M_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется скаляр $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Предложение 7.9 (8-е свойство определителей: разложение определителя по строке)

Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения.

Иными словами, если $A = (a_{ij}) \in F^{n \times n}$ и $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}. \qquad (2)$$

Эта формула называется *разложением определителя по k-й строке*. В силу принципа равноправия строк и столбцов имеет место также следующая формула *разложения определителя по k-му столбцу*:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Формула разложения определителя по строке подсказывает один из способов вычисления определителя. В самом деле, эта формула сводит вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n-1$ (поскольку алгебраические дополнения к элементам матрицы с точностью до знака совпадают с определителями порядка $n-1$). Каждый из этих определителей $(n-1)$-го порядка можно разложить по какой-то строке и свести его вычисление к вычислению $(n-1)$-го определителя порядка $n-2$. Продолжая этот процесс, можно в конечном счете свести вычисление исходного определителя к вычислению большого числа определителей сколь угодно малого (вплоть до второго) порядка. Правда, число этих определителей может быть очень велико (легко понять, что в общем случае возникает $(n-1)!$ определителей 2-го порядка). Используя другие свойства определителей, можно добиться того, что почти все из этих определителей будут умножаться на 0, и потому вычислять их не надо. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Прежде, чем приводить доказательство формулы (2) в общем случае, проиллюстрируем идею этого доказательства на примере определителя порядка 3. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка 3. Как мы видели выше,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Разобьем слагаемые в правой части этого равенства на три группы в зависимости от того, какой элемент первой строки они содержат (ниже эти три пары слагаемых выделены разными цветами):

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

В каждой паре слагаемых вынесем за скобки тот элемент первой строки, который входит в эти слагаемые, причем a_{11} и a_{13} вынесем с плюсом, а a_{12} — с минусом:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Заметим, что в «красных» скобках стоит определитель квадратной матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

которая получится, если из исходной матрицы A вычеркнуть первую строку и первый столбец. Это минор M_{11}.

Аналогично, в «голубых» скобках стоит определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},$$

т. е.минор M_{12}, а в «зеленых» скобках — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

т. е.минор M_{13}. Таким образом,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Поскольку $A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}$, а $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}$, окончательно получаем, что

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

А это и есть формула разложения определителя 3-го порядка по первой строке.

Перейдем к доказательству формулы разложения определителя по строке в общем случае.

Доказательство 8-го свойства определителей. Докажем сначала равенство (2) в случае, когда $k = 1$. Для всякого $1 \leqslant m \leqslant n$ рассмотрим сумму всех тех слагаемых, входящих в правую часть равенства (1), которые содержат множитель a_{1m} (каждое слагаемое берется с тем знаком, с каким оно входит в правую часть равенства (1)). В этой сумме вынесем a_{1m} за скобку и обозначим выражение в скобках через R_m. Ясно, что $|A| = a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \cdots + a_{1n}R_n$. Требуется доказать, что $R_m = A_{1m}$ для всякого $m = 1, 2, \ldots, n$.

Всякое слагаемое, входящее в R_m, имеет вид $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, где σ пробегает множество всех взаимно-однозначных отображений из множества $\{2, \ldots, n\}$ на множество $\{1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n\}$. Заметим, что в точности так же выглядят и те слагаемые, алгебраической суммой которых является минор M_{1m}, а значит и алгебраическое дополнение A_{1m}. Осталось показать, что слагаемое $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m и A_{1m} с одним и тем же знаком.

Пусть σ — произвольное взаимно-однозначное отображение из множества $\{2, \ldots, n\}$ на множество $\{1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n\}$. Расширим σ до подстановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ правилом $\sigma(1) = m$. Иными словами, будем рассматривать σ как подстановку из $\mathbf{S}_n$ такую, что $\sigma(1) = m$.

Слагаемое $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m с тем же знаком, с которым в $|A|$ входит слагаемое $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} = a_{1m}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$. Этот знак определяется четностью перестановки

$$(m, \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)). \tag{3}$$

Инверсиями этой перестановки являются в точности пары вида $(1, i)$ для всех чисел i таких, что $\sigma(i) < m$, и все пары вида (r, s) такие, что $2 \leqslant r < s \leqslant n$, но $\sigma(r) > \sigma(s)$. Число пар первого вида равно $m - 1$. Обозначим число пар второго вида через $i(\sigma)$. Тогда число инверсий перестановки (3) равно $m - 1 + i(\sigma)$. Следовательно, $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m со знаком $(-1)^{m-1+i(\sigma)}$. С другой стороны, из определения минора M_{1m} и алгебраического дополнения A_{1m} вытекает, что слагаемое $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в M_{1m} со знаком $(-1)^{i(\sigma)}$, а в A_{1m} — со знаком $(-1)^{1+m} \cdot (-1)^{i(\sigma)} = (-1)^{m+1+i(\sigma)}$. Учитывая, что

$$(-1)^{m+1+i(\sigma)} = (-1)^{m-1+i(\sigma)} \cdot (-1)^2 = (-1)^{m-1+i(\sigma)},$$

получаем, что $a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ входит в R_m и в A_{1m} с одним и тем же знаком. Следовательно, $R_m = A_{1m}$. Равенство (2) при $k = 1$ доказано.

Пусть теперь $1 < k \leqslant n$. Переставляя последовательно k-ю строку с $(k-1)$-й, $(k-2)$-й, ..., наконец, с первой, и используя 4-е свойство определителей, имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \dots & a_{k-1\,n} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель, стоящий в правой части последнего равенства, по первой строке. Поскольку миноры элементов первой строки этого определителя совпадают с минорами соответствующих элементов k-й строки исходного определителя, получим

$$|A| = (-1)^{k-1}\left(a_{k1} \cdot (-1)^{1+1} M_{k1} + a_{k2} \cdot (-1)^{1+2} M_{k2} + \dots + a_{kn} \cdot (-1)^{1+n} M_{kn}\right) =$$
$$= a_{k1} \cdot (-1)^{k+1} M_{k1} + a_{k2} \cdot (-1)^{k+2} M_{k2} + \dots + a_{kn} \cdot (-1)^{k+n} M_{kn} =$$
$$= a_{k1} A_{k1} + a_{k2} A_{k2} + \dots + a_{kn} A_{kn}.$$

Свойство доказано.

Предложение 7.10 (9-е свойство определителей)

Сумма произведений элементов некоторой строки квадратной матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Доказательство. Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$ (где, как обычно, n — порядок матрицы). Обозначим через A' матрицу, полученную из матрицы A заменой ее j-й строки на i-ю. Алгебраические дополнения элементов матриц A и A' будем обозначать через A_{rs} и A'_{rs} соответственно. Если $1 \leqslant r \leqslant n$ и $r \neq j$, то r-е строки в матрицах A и A' совпадают. Следовательно, $A_{jk} = A'_{jk}$ для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$. Разложим определитель матрицы A' по ее j-й строке. Учитывая, что элементы этой строки совпадают с элементами i-й строки матрицы A, получаем, что $|A'| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A'_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. С другой стороны, $|A'| = 0$ по 5-му свойству определителей. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$. $\square$

Определитель треугольной матрицы

Предложение 7.11

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали.

Доказательство. Предположим, что матрица $A = (a_{ij})$ верхнетреугольна. Обозначим порядок матрицы через n и будем доказывать предложение индукцией по n.

База индукции очевидна: если $n = 1$, то, как мы видели выше, $|A| = a_{11}$.

Шаг индукции. Пусть теперь $n > 1$. Разложив определитель A по первому столбцу и воспользовавшись предположением индукции, имеем:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}.$$

В случае нижнетреугольной матрицы доказательство аналогично, надо только воспользоваться разложением определителя по первой строке. □

Из предложения 7.11 немедленно вытекает

Следствие 7.4

Определитель единичной матрицы равен 1. □

Нам понадобится следующее простое наблюдение.

Замечание 7.1

Квадратная ступенчатая матрица является верхнетреугольной.

Доказательство. Пусть A — квадратная ступенчатая матрица. По определению ступенчатой матрицы, в начале каждой ее строки, кроме первой, должно стоять больше нулей, чем в начале предыдущей. Следовательно, во второй строке должен быть равен нулю как минимум первый элемент, во третьей должны быть равны нулю как минимум первые два элемента, в четвертой — как минимум первые три и т. д. В последней строке должны быть равны нулю как минимум все элементы, кроме последнего. Таким образом, все элементы матрицы A ниже главной диагонали равны 0, т. е. матрица A верхнетреугольна. $\square$

Вычисление определителя с помощью приведения матрицы к треугольному виду

Предложение 7.11 в сочетании со свойствами определителей подсказывает один из способов вычисления определителя. Пусть дана квадратная матрица A. С помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. При этом нулевые строки, если они будут появляться, вычеркивать не будем, а будем «накапливать» в нижней части матрицы. В результате получим ступенчатую квадратную матрицу A'. В силу замечания 7.1 матрица A' верхнетреугольна. Ее определитель легко подсчитать (см. предложение 7.11). При переходе от A к A' определитель матрицы мог меняться в двух случаях: во-первых, если какие-то две строки менялись местами, то определитель умножался на -1 (по 4-му свойству определителей), и во-вторых, если какая-то строка умножалась на некоторый ненулевой скаляр, то определитель умножался на тот же скаляр (по 2-му свойству определителей)[1]. Таким образом, $|A'| = k \cdot |A|$ для некоторого скаляра $k \neq 0$, значение которого можно вычислить, проследив за тем, как матрица A приводилась к ступенчатому виду. Разделив $|A'|$ на k, мы получим $|A|$.

[1]Более точно: если к i-й строке, умноженной на s, прибавлялась j-я строка, умноженная на t, то определитель умножался на s.

7.4. Определитель полураспавшейся матрицы

Для дальнейшего нам потребуется рассмотреть один специальный вид матриц.

Определения

Квадратная матрица L порядка n называется *полураспавшейся*, если либо

$$L = \begin{pmatrix} A & N \\ O & B \end{pmatrix}, \tag{4}$$

либо

$$L = \begin{pmatrix} A & O \\ N & B \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где A и B — квадратные матрицы, O — нулевая, а N — произвольная матрицы подходящих размеров. Матрицы A и B называются *диагональными блоками* полураспавшейся матрицы L.

Предложение 7.12

Если L — полураспавшаяся матрица с диагональными блоками A и B, то $|L| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда матрица L имеет вид (4). В самом деле, если L имеет вид (5), то $L^\top$ — полураспавшаяся матрица вида (4) с диагональными блоками $A^\top$ и $B^\top$. Поэтому если для матриц вида (4) предложение уже доказано, то, используя 1-е свойство определителей, имеем $|L| = |L^\top| = |A^\top| \cdot |B^\top| = |A| \cdot |B|$. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $N = (n_{ij})$. Обозначим порядки матриц A и B через p и q соответственно. Дальнейшие рассуждения проведем индукцией по p.

База индукции. Если $p = 1$, то $A = (a_{11})$ и

$$|L| = \begin{vmatrix} a_{11} & n_{11} & n_{12} & \dots & n_{1q} \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix}.$$

Разложив определитель из правой части этого равенства по первому столбцу, получим, что $|L| = a_{11} \cdot |B| = |A| \cdot |B|$.

Определитель полураспавшейся матрицы (2)

Шаг индукции. Пусть $p > 1$. Минор матрицы A, соответствующий элементу a_{ij}, обозначим через M_{ij}. Разложив определитель матрицы L по первому столбцу и использовав предположение индукции, получим (выкладки начинаются на этом слайде и завершаются на следующем):

$$|L| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2p} & n_{21} & \dots & n_{2q} \\ a_{32} & \dots & a_{3p} & n_{31} & \dots & n_{3q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{p2} & \dots & a_{pp} & n_{r1} & \dots & n_{rq} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1p} & n_{11} & \dots & n_{1q} \\ a_{32} & \dots & a_{3p} & n_{31} & \dots & n_{3q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{p2} & \dots & a_{pp} & n_{r1} & \dots & n_{pq} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} +$$

$$+ \dots + (-1)^{p+1} a_{p1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & \dots & a_{1p} & n_{11} & \dots & n_{1q} \\ a_{22} & \dots & a_{2p} & n_{21} & \dots & n_{2q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{p-1\,2} & \dots & a_{p-1\,p} & n_{p-1\,1} & \dots & n_{p-1\,q} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} =$$

Определитель полураспавшейся матрицы (3)

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}M_{11} \cdot |B| - a_{21}M_{21} \cdot |B| + \dots + (-1)^{p+1} a_{p1}M_{p1} \cdot |B| = \\
&= a_{11}A_{11} \cdot |B| + a_{21}A_{21} \cdot |B| + \dots + a_{p1}A_{p1} \cdot |B| = \\
&= (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{p1}A_{p1}) \cdot |B| = \\
&= |A| \cdot |B|.
\end{aligned}
$$

Предложение доказано. $\square$

7.5. Определитель Вандермонда

Во многих приложениях, как в алгебре, так и в других областях математики, возникает следующий определитель:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Он называется *определителем Вандермонда*.

Предложение 7.13

Пусть $n > 1$, а F — произвольное поле. Для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ выполнено равенство

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Определитель Вандермонда (2)

Доказательство будем вести индукцией по n. Минимально возможное значение n равно 2.

База индукции очевидна:

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1.$$

Шаг индукции. Пусть $n > 2$. Из каждого столбца определителя $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, кроме первого, вычтем предыдущий, умноженный на x_1. Используя 7-е свойство определителей и принцип равноправия строк и столбцов, получим:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \hdotsfor{5} \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Определитель Вандермонда (3)

Полученный определитель разложим по первой строке, после чего вынесем из первой строки $x_2 - x_1$, из второй $x_3 - x_1$, ..., из последней $x_n - x_1$. Используя 1-е свойство определителей и принцип равноправия строк и столбцов, получим:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \cdot V(x_2, \ldots, x_n).$$

Используя предположение индукции, имеем:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdot V(x_2, \dots, x_n) =$$
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdot \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) =$$
$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).$$

Предложение доказано. □

Из доказанного утверждения вытекает следующий факт.

Следствие 7.5

$V(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда числа x_1, x_2, ..., x_n попарно различны. □

Именно это свойство определителя Вандермонда чаще всего используется в приложениях. В нашем курсе оно будет применено в § 18 при изучении многочленов.