§ 4. Комплексные числа

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Зачем нужно расширять понятие числа?

Основные числовые множества, т. е. множества всех натуральных, целых, рациональных и действительных чисел, связаны между собой очевидными включениями: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Одной из основных причин последовательного расширения понятия числа является потребность в решении все более сложных уравнений. В множестве натуральных чисел неразрешимо даже такое простейшее уравнение, как $x + 1 = 0$. После перехода от натуральных чисел к целым оно становится разрешимым, но остается неразрешимым уравнение $2x = 1$. Эта проблема решается с появлением рациональных чисел, но при этом остается неразрешимым уравнение $x^2 = 2$. Последний шаг, который делается в школьном курсе математики, — это переход к действительным числам. Он позволяет решить уравнение $x^2 = 2$, но оставляет неразрешимым, например, такое простое уравнение, как $x^2 + 1 = 0$. В этом параграфе делается еще один шаг — вводятся в рассмотрение комплексные числа, включающие в себя действительные числа как весьма частный случай. Как мы увидим в этом параграфе, в множестве комплексных чисел уравнение $x^2 + 1 = 0$ уже разрешимо. Более того, как мы узнаем в § 19, в этом множестве разрешимо любое алгебраическое уравнение с одним неизвестным. Это позволяет говорить о том, что переход от действительных чисел к комплексным — последнее естественное расширение понятия числа.

4.1. Определение и алгебраическая форма комплексных чисел

Определения

Комплексным числом называется упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b. Числа (a, b) и (c, d) называются *равными*, если $a = c$ и $b = d$. Действительное число a называется *действительной частью* числа (a, b), а действительное число b — *мнимой частью* числа (a, b). *Суммой* комплексных чисел (a, b) и (c, d) называется число $(a + c, b + d)$, а их *произведением* — число $(ac - bd, ad + bc)$. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

- Тот факт, что некие «новые» числа вводятся как пары «старых», не должен удивлять. Ведь и рациональное число $\frac{m}{n}$ при желании можно определить как упорядоченную пару целых чисел (m, n). На языке пар можно определить и операции над рациональными числами: $(m, n) + (k, \ell) = (m\ell + kn, n\ell)$ и $(m, n) \cdot (k, \ell) = (mk, n\ell)$. Правда, действовать с рациональными числами в таком виде неудобно, поэтому лучше перейти к традиционной их записи в виде дроби. С комплексными числами ситуация аналогична: уже совсем скоро мы перейдем от записи комплексных чисел в виде пар к более удобному виду записи (к алгебраической форме комплексных чисел).

Вложение действительных чисел в комплексные

Легко проверяется, что множество $\mathbb{C}$ является кольцом относительно операций сложения и умножения.

Лемма 4.1

Кольцо $\mathbb{R}$ изоморфно вложимо в кольцо $\mathbb{C}$.

Доказательство. Обозначим через R множество всех комплексных чисел, мнимая часть которых равна 0. Из определения операций сложения и умножения комплексных чисел с очевидностью вытекает, что

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \quad \text{и} \quad (a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0).$$

Это означает, что R — подкольцо в $\mathbb{C}$. Очевидно, что отображение из $\mathbb{R}$ в R, которое отображает произвольное число $a \in \mathbb{R}$ в пару $(a, 0)$, является изоморфизмом $\mathbb{R}$ на R. $\square$

- Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
- Аналогичным образом целые числа вкладываются в рациональные: целое число n отождествляется с рациональным числом $(n, 1)$, которое обычно записывают в виде $\frac{n}{1}$ (см. пример 3 в конце § 3).

Определение

Комплексное число $(0,1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается через i.

По определению умножения комплексных чисел

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0).$$

Как мы уже договорились, мы не различаем комплексное число $(-1,0)$ и действительное число -1. Таким образом, $i^2 = -1$. Мы видим, что

!! в кольце $\mathbb{C}$ разрешимо уравнение $x^2+1=0$, неразрешимое в кольце $\mathbb{R}$. Более того, как мы узнаем в конце этого параграфа, в $\mathbb{C}$ разрешимо любое уравнение вида $x^n + a = 0$, где $n \in \mathbb{N}$, а $a \in \mathbb{R}$.

Заметим, что $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Определение

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа (a, b).

Заметим, что

$$(a + bi) + (c + di) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

С другой стороны,

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = ac+(ad+bc)i-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Иными словами,

- *сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с «неизвестным» i; при умножении дополнительно учитывается, что $i^2 = -1$.*

Свойства сложения и умножения комплексных чисел

Множество $\mathbb{C}$ с операциями сложения и умножения является полем.

Доказательство. Из определения сложения комплексных чисел с очевидностью вытекает, что $\langle \mathbb{C}; + \rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом 0; обратным по сложению (т. е. противоположным) к элементу $z = a + bi$ является элемент $-z = -a - bi$. Используя определение произведения комплексных чисел, легко проверить, что умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения, а 1 является нейтральным элементом по умножению. Например, если $x = a + bi$, а $y = c + di$, то

$$xy = (ac - bd) + (ad + bc)i, \quad \text{а} \quad yx = (ca - db) + (cb + da)i,$$

откуда $xy = yx$. Остается проверить, что для всякого ненулевого комплексного числа существует обратное к нему число. Пусть $v = a + bi$ и $v \neq 0$. Отметим, что $a^2 + b^2 \neq 0$, поскольку в противном случае $a = b = 0$ и $v = 0$. Положим $w = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} \cdot i$. Тогда

$$v \cdot w = (a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i\right) = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \cdot i = 1.$$

Таким образом, w обратно к v. □

Комплексное сопряжение (1)

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается через $\overline{x}$.

- Отображение f, заданное правилом $f(x) = \overline{x}$, является унарной операцией на $\mathbb{C}$.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) $\overline{\overline{x}} = x$;
2) $x = \overline{x}$ *тогда и только тогда, когда* x *— действительное число;*
3) $x + \overline{x}$ *— действительное число;*
4) $x \cdot \overline{x}$ *— действительное число; более того,* $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, *причем* $x \cdot \overline{x} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = 0$;
5) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
6) $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

- Свойства 5) и 6) означают, что отображение f из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, задаваемое правилом $f(z) = \overline{z}$, является эндоморфизмом. Более того, это отображение биективно, и потому является автоморфизмом.

Доказательство. Пусть $x = a + bi$ и $y = c + di$.

1) $\overline{\overline{x}} = \overline{a - bi} = a + bi = x$.

2) Если $x = \overline{x}$, т. е. $a + bi = a - bi$, то $2bi = 0$, откуда $b = 0$, и значит $x \in \mathbb{R}$. Обратно, если $x \in \mathbb{R}$, то $b = 0$, и потому $x = \overline{x}$.

3), 4) Достаточно учесть, что $x + \overline{x} = 2a$, а $x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

5), 6) Ясно, что

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{x} + \overline{y}, \\ \text{а} \quad \overline{xy} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{x} \cdot \overline{y}. \end{aligned}$$

Все свойства доказаны. $\square$

Свойство 4) можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа $\frac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $c-di$, имеем:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \\ = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

4.2. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Для того, чтобы ввести еще одну форму записи комплексных чисел, нам потребуется их геометрическая интерпретация. Из школьного курса известна геометрическая интерпретация множества всех действительных чисел как множества точек числовой прямой. Обобщая это построение, рассмотрим плоскость, на которой зафиксирована прямоугольная декартова система координат. Комплексное число $a + bi$ будем изображать точкой плоскости с координатами (a, b). Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости (причем только одна) и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать комплексное число (причем только одно). Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа. Начало координат соответствует числу 0.

Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой M (см. рис. 1 на следующем слайде). Тогда длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OM называется *аргументом* числа z. У числа 0 аргумент не определен. Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а его аргумент — через $\arg(z)$.

На рис. 1 $r = |z|$ и $\varphi = \arg(z)$.

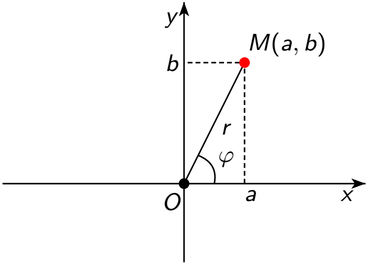

Рис. 1. Геометрическая интерпретация
комплексного числа

Отметим, что

- для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса;
- если $x = a + bi$, то $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- аргумент ненулевого комплексного числа определен неоднозначно, так как если φ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом k.

Свойства модуля комплексного числа

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) $|x| = |\,\overline{x}\,|$;
2) $x \cdot \overline{x} = |x|^2$;
3) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство. 1), 2) Пусть $x = a + bi$. Тогда

$$|\,\overline{x}\,| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |x| \text{ и}$$
$$x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2.$$

3) Пусть $x = a + bi$ и $y = c + di$. Тогда:

$$|xy| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} =$$
$$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} =$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} = |x| \cdot |y|.$$

4) Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат и обозначим через A, B и C точки на плоскости, отвечающие числам x, y и $x+y$ соответственно при геометрической интерпретации комплексных чисел. Предположим сначала, что точки A и B не лежат на одной прямой. Тогда, учитывая, что длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, имеем

$$|x+y| = |OC| < |OA| + |AC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|$$

(см. рис. 2 на следующем слайде). Пусть теперь точки A и B лежат на одной прямой. Если эти точки лежат по одну сторону от точки O, то, очевидно,

$$|x+y| = |OC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

Пусть, наконец, точки A и B лежат по разные стороны от точки O. Без ограничения общности будем считать, что $|x| \geqslant |y|$. Тогда точка C принадлежит отрезку OA, и потому

$$|x+y| = |OC| \leqslant |OA| = |x| \leqslant |x| + |y|. \qquad \square$$

Свойства модуля комплексного числа (рисунок)

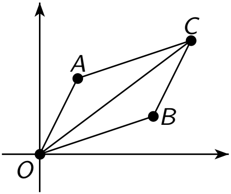

Рис. 2. Модуль суммы комплексных чисел

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad\text{и}\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Определение

Если r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* этого числа.

- Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.
- Число 0 не имеет тригонометрической формы, так как у него не определен аргумент.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right] = \\
&= r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).
\end{aligned}$$

Мы видим, что:

- *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов*;
- *модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного — разности аргументов z_1 и z_2*.

Возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме вытекает, что

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1}$$

для любого натурального n. Таким образом,

- *при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

Формула (1) называется *формулой Муавра*.

Извлечение корней из комплексных чисел (1)

Перейдем к вопросу об извлечении корней произвольной натуральной степени из комплексных чисел. Прежде всего, дадим нужное определение.

Определение

Пусть n — натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Из определения не вытекает, что корень n-й степени из z существует. Тем более не ясно, сколько значений может он принимать, если существует. Вспомним, как обстоит дело в поле $\mathbb{R}$. Корень n-й степени из действительного числа x:

- существует и определен однозначно, если либо n нечетно, а x — любое, либо $x = 0$ (в последнем случае корень равен 0 независимо от n);
- существует и имеет ровно два (противоположных по знаку) значения, если n четно и $x > 0$;
- не существует, если n четно и $x < 0$.

В поле $\mathbb{C}$ все намного проще. Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n корень n-й степени из z в поле $\mathbb{C}$ существует и определен однозначно (а именно, равен 0). Если же $z \neq 0$, то, как мы сейчас увидим, для любого натурального n корень n-й степени из z в поле $\mathbb{C}$ существует и имеет ровно n различных значений.

Положим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Корень n-й степени из z будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда, в силу формулы (1),

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — некоторое целое число. Поскольку q и r — положительные действительные числа, это означает, что q — арифметический корень степени n из числа r. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$. Итак, корень n-й степени из числа $z \neq 0$ всегда существует и все его значения задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (2)$$

где k — целое число.

Выясним, сколько существует попарно различных чисел среди чисел вида w_k. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\frac{k-\ell}{n} = m$ или $k - \ell = nm$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда $k - \ell$ делится на n, т. е. k и ℓ имеют одинаковые остатки при делении на n. Поэтому чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (2) последовательно приравнивать k к одному из чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом,

- *если z — произвольное комплексное число, отличное от 0, $r = |z|$, $\varphi = \arg(z)$, а n — произвольное натуральное число, то корень n-й степени из z имеет ровно n различных значений, которые могут быть вычислены по формуле*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$