

## Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и геометрия»

Зимняя сессия 2022-2023 уч. года

(группы КНМО-101,102,103)

1. Мощность конечного множества. Булеан множества. Мощность прямого произведения конечного числа конечных множеств и булеана  $n$ -элементного множества.
2. Размещения и перестановки. Транспозиции. Четные и нечетные перестановки, смена четности перестановки при транспозиции. Теорема о перечислении перестановок.
3. Сочетания. Биномиальные коэффициенты и их свойства.
4. Комплексные числа: определение, алгебраическая форма записи, комплексное сопряжение.
5. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корней из них.
6. Строение общего решения системы линейных уравнений.
7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: приведение матрицы к ступенчатому виду, общая схема метода Гаусса и обоснование его корректности.
8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: случаи несовместной, определенной и неопределенной системы. Число свободных переменных в неопределенной системе. Метод Гаусса-Жордана в случае определенной системы.
9. Определители: определение и свойства с 1-го по 7-е.
10. 8-е и 9-е свойства определителей. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя произвольной квадратной матрицы методом приведения к треугольному виду. Определитель Вандермонда.
11. Определитель полуразреженной матрицы и определитель произведения матриц.
12. Крамеровские системы линейных уравнений. Теорема Крамера и следствия из нее.
13. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, критерий ортогональности векторов, ослабленный закон сокращения. Вычисление скалярного произведения векторов, длины вектора и угла между векторами по их координатам.
14. Векторное произведение векторов: определение, свойства, критерий коллинеарности векторов на языке векторного произведения, геометрический смысл векторного произведения, его вычисление по координатам векторов.
15. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, критерий компланарности векторов. Геометрический смысл смешанного произведения и его вычисление по координатам векторов. Определение ориентации тройки векторов с помощью смешанного произведения.
16. Система координат, координаты точки. Деление отрезка в данном отношении. Замена системы координат. Поворот системы координат на плоскости.
17. Общее и параметрические уравнения кривой на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости (параметрические, каноническое, по двум точкам, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках).
18. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Пучок прямых.
19. Полуплоскости, определяемые прямой. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
20. Общее и параметрические уравнения поверхности. Виды уравнений плоскости (параметрические, каноническое, по трем точкам, общее, в отрезках).
21. Взаимное расположение двух плоскостей. Пучок плоскостей.
22. Полупространства, определяемые плоскостью. Расстояние от точки до плоскости.
23. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве. Виды уравнений прямой в пространстве (общие, параметрические, канонические, по двум точкам).
24. Взаимное расположение прямой и плоскости. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
25. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
26. Многочлены от одной переменной: определение, операции, кольцо многочленов. Стандартная запись многочлена. Теорема о делении многочленов с остатком.
27. Наибольший общий делитель двух многочленов. Взаимно простые многочлены.

28. Многочлены как функции. Аппроксимация функций многочленами. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Связь между равенством многочленов как последовательностей и их равенством как функций.
29. Корни многочленов. Теорема Безу и следствие из нее. Лемма о модуле старшего члена и следствие о модуле корня. Существование действительных корней у многочленов нечетной степени над полем  $\mathbf{R}$ .
30. Теорема Штурма. Число действительных корней многочлена над полем  $\mathbf{R}$ .
31. Рациональные корни многочленов над полем  $\mathbf{Q}$ .
32. неприводимые многочлены. Разложение многочлена на неприводимые множители.
33. Основная теорема алгебры и следствия из нее. Неприводимые многочлены над полями  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{R}$ .
34. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости многочленов над кольцом  $\mathbf{Z}$  и над полем  $\mathbf{Q}$ . Критерий Эйзенштейна. Алгоритм Кронекера.
35. Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.
36. Векторные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов.
37. Базис векторного пространства. Разложение вектора по базису. Равномощность базисов. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Теорема об изоморфизме векторных пространств.
38. Подпространства. Связь между размерностью подпространства и размерностью пространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерности суммы подпространств.
39. Прямая сумма подпространств. Теорема о прямой сумме. Проекция вектора на подпространство. Дополняющее подпространство.
40. Линейные многообразия. Критерий совпадения линейных многообразий. Следствие о векторе сдвига. Пересечение и объединение линейных многообразий.