

**Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и геометрия»**  
**Зимняя сессия 2024-2025 уч. года**  
**(группы КНМО-101,102,103)**

1. Мощность конечного множества. Булеан множества. Мощность прямого произведения конечного числа конечных множеств и булеана  $n$ -элементного множества.
2. Размещения и перестановки. Транспозиции. Четные и нечетные перестановки, смена четности перестановки при транспозиции. Теорема о перечислении перестановок.
3. Сочетания. Биномиальные коэффициенты и их свойства.
4. Комплексные числа: определение, вложение действительных чисел в комплексные, алгебраическая форма записи комплексных чисел, комплексное сопряжение.
5. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корней из них.
6. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: приведение матрицы к ступенчатому виду, общая схема метода Гаусса и обоснование его корректности.
7. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений: случаи несовместной, определенной и неопределенной системы. Число свободных переменных в неопределенной системе. Метод Гаусса-Жордана в случае определенной системы.
8. Определители: определение, определители малых порядков, 1-е свойство определителей (неизменяемость при транспонировании).
9. Определители: свойства со 2-го по 7-е.
10. 8-е и 9-е свойства определителей. Определитель треугольной матрицы. Вычисление определителя произвольной квадратной матрицы методом приведения к треугольному виду.
11. Определитель полураспавшейся матрицы и определитель произведения матриц.
12. Определитель Вандермонда.
13. Крамеровские системы линейных уравнений. Теорема Крамера и следствия из нее.
14. Линейные операции над векторами. Критерий коллинеарности векторов. Базис на плоскости в пространстве, координаты вектора.
15. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, критерий ортогональности векторов, ослабленный закон сокращения. Вычисление скалярного произведения векторов, длины вектора и угла между векторами по их координатам.
16. Векторное произведение векторов: определение, свойства, критерий коллинеарности векторов на языке векторного произведения, геометрический смысл векторного произведения. Вычисление векторного произведения по координатам векторов.
17. Двойное векторное произведение. Формула «бац минус цаб». Тождество Якоби.
18. Смешанное произведение векторов: определение, свойства, критерий компланарности векторов, геометрический смысл смешанного произведения. Вычисление смешанного произведения по координатам векторов. Определение компланарности векторов по их координатам. Определение ориентации тройки векторов с помощью смешанного произведения.
19. Система координат, координаты точки. Деление отрезка в данном отношении.
20. Замена системы координат. Поворот системы координат на плоскости.
21. Общее и параметрические уравнения кривой на плоскости. Виды уравнений прямой на плоскости (параметрические, каноническое, по двум точкам, общее, с угловым коэффициентом, в отрезках).
22. Взаимное расположение двух прямых на плоскости.
23. Пучок прямых.
24. Полуплоскости, определяемые прямой.
25. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
26. Общее и параметрические уравнения поверхности. Виды уравнений плоскости (параметрические, каноническое, по трем точкам, общее, в отрезках).
27. Взаимное расположение двух плоскостей.
28. Пучок плоскостей.
29. Полупространства, определяемые плоскостью.

30. Расстояние от точки до плоскости.
31. Общие и параметрические уравнения кривой в пространстве. Виды уравнений прямой в пространстве (общие, параметрические, канонические, по двум точкам).
32. Взаимное расположение прямой и плоскости.
33. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
34. Расстояние от точки до прямой в пространстве.
35. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
36. Многочлены от одной переменной: определение, операции, кольцо многочленов. Стандартная запись многочлена. Теорема о делении многочленов с остатком.
37. Наибольший общий делитель двух многочленов. Взаимно простые многочлены.
38. Многочлены как функции. Интерполяционный многочлен Лагранжа: существование, единственность, два способа нахождения.
39. Два понятия равенства многочленов.
40. Корни многочленов. Теорема Безу и следствие из нее.
41. Основная теорема алгебры и следствия из нее.
42. Лемма о модуле старшего члена и следствие о модуле корня. Лемма о корнях многочлена над полем  $\mathbb{C}$  с действительными коэффициентами.
43. Существование действительных корней у многочленов нечетной степени над полем  $\mathbb{R}$  (аналитическое и алгебраическое доказательства).
44. Теорема Штурма. Число действительных корней многочлена над полем  $\mathbb{R}$ .
45. Рациональные корни многочленов над полем  $\mathbb{Q}$ .
46. Неприводимые многочлены и их общие свойства. Разложение многочлена на неприводимые множители.
47. Отделение кратных множителей.
48. Неприводимые многочлены над полями  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}$ .
49. Лемма Гаусса. Эквивалентность неприводимости многочленов над кольцом  $\mathbb{Z}$  и над полем  $\mathbb{Q}$ . Критерий Эйзенштейна.
50. Алгоритм Кронекера.
51. Рациональные дроби. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.