Глава I. Матрицы и определители

§ 6. Алгоритм обращения матрицы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.

Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Мы доказали, что матрица обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от 0. Мы также доказали формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A} \qquad (*)$$

для вычисления обратной матрицы, но сказали, что матриц порядка 3 и больше формула $(*)$ вычислительно неэффективна по сравнению с методом Гаусса. Опишем этот метод.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$-матрице A слева единичную $n \times n$-матрицу и проделаем над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1}.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Вот список преобразований, которые мы будем называть *элементарными*:

- I: Перестановка двух столбцов (строк).
- II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).
- III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

На практике элементарные преобразования II-го и III-го родов обычно комбинируют, чтобы прибавить к столбцу (строке) произведение другого столбца (другой строки) на ненулевой скаляр:

$$\begin{aligned}&(\dots\ \mathbf{a}_i\ \dots\ \mathbf{a}_j\ \dots) \xrightarrow{\mathrm{III}:\lambda\times j} (\dots\ \mathbf{a}_i\ \dots\ \lambda\mathbf{a}_j \dots) \xrightarrow{\mathrm{II}:i+j}\\ &\qquad (\dots\ \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j\ \dots\ \lambda\mathbf{a}_j \dots) \xrightarrow{\mathrm{III}:\lambda^{-1}\times j} (\dots\ \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j\ \dots\ \mathbf{a}_j \dots)\end{aligned}$$

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо. Каждое преобразование I-го рода обратно само себе: если поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки) матрицы A, а в получившейся матрице снова поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки), то вернемся к исходной матрице A.

Обратным к преобразованию II-го рода, которое прибавляет к i-му столбцу j-й столбец (к i-й строке j-ю строку), будет преобразование, которое вычитает из i-го столбца j-й столбец (из i-й строки j-ю строку). Выше показано, как скомбинировать такое вычитание из преобразований II-го и III-го родов.

Наконец, обратным к преобразованию III-го рода, которое умножает i-й столбец (i-ю строку) на скаляр $\lambda \neq 0$, будет преобразование, которое умножает i-й столбец (i-ю строку) на скаляр λ^{-1}. $\square$

Обоснование алгоритма

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

Покажем, что обратимую матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя *только со строками*.

Поскольку $\det A \neq 0$, в первом столбце A есть ненулевой элемент. С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ останется ненулевым. Поэтому ее второй столбец непропорционален первому, откуда среди его элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. Определитель все время остается ненулевым, откуда никакой столбец не станет линейной комбинацией предыдущих. Поэтому на шаге, когда обработаны первые j столбцов $(j < n)$, среди нижних $n - j + 1$ элементов $(j + 1)$-го столбца найдется ненулевой, и процесс можно продолжать, пока не будут обработаны все n столбцов.

Лемма о элементарных преобразованиях

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

— произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Для каждого элементарного преобразования над столбцами (строками) A построим матрицу, умножение на которую справа (слева) дает тот же результат.

Лемма о элементарных преобразованиях — интуиция

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E. Та матрица T, которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Перестановка i-го и j-го столбцов (i-й и j-й строк) матрицы A равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице переставить i-й и j-й столбцы (или, что равносильно, переставить i-ю и j-ю строки).

Лемма о элементарных преобразованиях — построение (2)

Добавление к i-му столбцу матрицы A ее j-го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
 & & i & & j & &
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0{\color{red}1} & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1{\color{red}0} & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\
\end{array}
\end{array},
$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-му столбцу j-й столбец. Аналогично, добавление к i-й строке матрицы A ее j-й строки равносильно умножению A слева на матрицу, которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-й строке j-ю строку (показано красным).

Умножение i-го столбца (i-й строки) матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$ равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},
$$

которая получается, если в единичной матрице умножить i-й столбец (или, что равносильно, i-ю строку) на λ. $\square$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \dots, T_s$ — такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \text{ и } T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. □

Замечание: аналогично обосновывается «вертикальный» вариант алгоритма, когда единичную матрицу приписывают сверху и проделывают элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$ до тех пор, пока «знаменатель» не станет равным E.