Глава I. Матрицы и определители

§ 2. Определители второго и третьего порядков

М.В.Волков

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Соглашение

Начиная с этой лекции и до особого указания будем рассматривать только *квадратные* матрицы. Таким образом, по умолчанию слово «матрица» будет означать «квадратная матрица».

Определение

Определителем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

второго порядка (или просто *определителем второго порядка*) называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-7) - (-3) \cdot 1 = -11; \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$. Умножим первое уравнение на a_{22}, второе – на a_{12}, а затем вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$.

Теперь умножим первое уравнение исходной системы на a_{21}, второе – на a_{11} и вычтем второе из получившихся уравнений из первого. Получим $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2$, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Видно, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то решениями системы могут быть лишь $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$. С другой стороны, прямой подстановкой можно проверить, что эти выражения являются решениями. Итак, *если* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, *система* $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$ *имеет единственное решение.*

Утверждение о том, что если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, система $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{cases}$ имеет единственное решение, составляет содержание *теоремы Крамера*, а формулы $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ и $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$, по которым это единственное решение вычисляется, называются *формулами Крамера*.

Определитель $\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, т.е. определитель основной матрицы системы, называют *определителем системы*. Заметим, что определители в числителях формул Крамера получаются из Δ по простому правилу: *столбец коэффициентов при искомом неизвестном заменяется на столбец свободных членов.*

Определение

Определителем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка (или просто *определителем третьего порядка*) называется число, равное

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

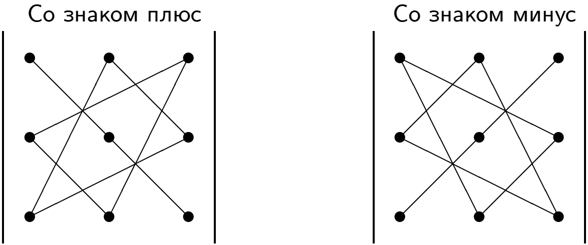
Это число обозначается через

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ или } |A|, \text{ или } \det A.$$

Например,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\\ &= 1\cdot 3\cdot 1 + (-1)\cdot 5\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot(-2) - 2\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot 5\cdot(-2)\\ &= 3 - 5 + 0 - 6 - 0 + 10 = 2.\end{aligned}$$

Формула для вычисления определителя третьего порядка выглядит громоздко. Укажем правило, позволяющее ее запомнить.
Определитель третьего порядка является алгебраической суммой шести слагаемых, из которых три берутся со знаком плюс, а три – со знаком минус. Каждое слагаемое — это произведение трех элементов матрицы. На следующей схеме слева соединены элементы матрицы, произведение которых берется со знаком плюс, а справа – элементы, произведение которых берется со знаком минус:



Правило треугольников

Определители третьего порядка можно применять для решения систем трех линейных уравнений с тремя неизвестными подобно тому, как определители второго порядка применяются для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Свяжем с системой

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

четыре определителя третьего порядка:

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_1 := \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется *определителем системы*, а определители Δ_i получаются из него заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Теорема Крамера для систем третьего порядка

Если $\Delta \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое вычисляется по *формулам Крамера*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Мы не будем сейчас доказывать эту теорему, поскольку позднее докажем теорему Крамера для систем n линейных уравнений с n неизвестными. Для этого придется построить теорию определителей n-го порядка.