Глава I. Матрицы и определители

§ 1. Матрицы. Действия с матрицами

М.В.Волков

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определение

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Если матрица содержит k строк и n столбцов, говорят, что она имеет *размер* $k \times n$. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, матрица называется *квадратной*. Вместо «матрица размера $n \times n$» можно говорить *квадратная матрица порядка* n.
Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами* матрицы. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и на одинаковых местах в них стоят одни и те же элементы.

Вот матрица размера 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0{,}5 & \pi \end{pmatrix}.$$

В записи матрицы не проводят линии, отделяющие строки и столбцы друг от друга. Слева и справа матрица ограничивается круглыми скобками.

Обозначения для матриц

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация, при этом первый индекс означает номер строки, а второй — номер столбца, в которых стоит данный элемент. Например, a_{12} — элемент, стоящий в первой строке и втором столбце.
Произвольная матрица размера $k \times n$ обозначается следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Кратко эта матрица записывается в виде $A = (a_{ij})$, а если важно указать ее размер – то в виде $A = (a_{ij})_{k \times n}$.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — матрицы размера $k \times n$. *Суммой* матриц A и B называется матрица $C = (c_{ij})_{k \times n}$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Эта матрица обозначается через $A + B$.

Если матрицы A и B имеют различные размеры, их сумма не определена. Поэтому дальше запись $A + B$ подразумевает, что матрицы A и B имеют один и тот же размер.

Свойства сложения матриц

1. $A + B = B + A$ (*коммутативность*)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*ассоциативность*)
3. Если O – матрица, все элементы которой нулевые, то $A + O = A$ для любой матрицы A того же размера. Матрицу O называют *нулевой*.
4. Для любой матрицы A найдется матрица B такая, что $A + B = O$. Матрицу B называют *противоположной к матрице* A и обозначают $-A$.

Свойство 4 позволяет определить *вычитание* матриц одинакового размера правилом $A - B := A + (-B)$.

Умножение матрицы на число и транспонирование матрицы

Определение

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{k\times n}$ на число α называется матрица $\alpha A := (\alpha a_{ij})_{k\times n}$.

Так же, как и сложение матриц, умножение матрицы на число выполняется покомпонентно.

Определение

Транспонирование матрицы – это замена ее строк на ее столбцы. Если $A = (a_{ij})_{k\times n}$, то $A^T := (a_{ji})_{n\times k}$.

Пример: $\begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0{,}5 & \pi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0{,}5 \\ \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}.$

Определение

Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы A.

Транспонирование квадратной матрицы – ее отражение относительно главной диагонали.

Умножение матриц

Произведение матриц A и B определено тогда и только тогда, когда число столбцов A равно числу строк B. Если A имеет размер $k \times \ell$, а B – размер $\ell \times m$, то произведение AB будет матрицей размера $k \times m$.

Определение

Если $A = (a_{ij})_{k \times \ell}$, а $B = (b_{ij})_{\ell \times m}$, то *произведением* матриц A и B называется матрица $AB = (c_{ij})_{k \times m}$ такая, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{i\ell}b_{\ell j} \text{ для всех } i = 1, 2, \dots, k \text{ и } j = 1, 2, \dots, m.$$

Иными словами, c_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Говорят, что матрицы перемножаются по правилу «строка на столбец».

Пример: умножим $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ на $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Ответ: $AB = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}$.

Запись правила «строка на столбец» с помощью знака суммы:

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{t=1}^{\ell} a_{it}b_{tj}}$$

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно! Даже для квадратных матриц A и B одинакового размера, когда оба произведения AB и BA определены, как правило, $AB \neq BA$.

Упражнение: составьте две 2×2-матрицы из цифр даты своего рождения. Например, для даты 01.02.2003 эти матрицы будут $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Перемножьте эти матрицы в разном порядке и сравните результаты.

Доказательство. Свойства 2) и 3) проверяются простыми вычислениями. Докажем свойство 1). Пусть $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times r}$ и $C=(c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB=(d_{ij})_{m\times r}$ и $BC=(f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C=(g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC)=(h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij}=h_{ij}$ для всех $i=1,2,\ldots,m$ и $j=1,2,\ldots,s$. В самом деле:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{k=1}^{r} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\Big[\Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\Big)\cdot c_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} = \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\Big[a_{i\ell}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{r} b_{\ell k}c_{kj}\Big)\Big] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}f_{\ell j} = h_{ij}. \end{aligned}$$

Свойство 1) доказано. □

Упражнение: докажите свойство 4).

Единичная матрица

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно также записать $E_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$, используя *символ Кронекера*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Свойство единичной матрицы

Если произведение AE [соответственно EA] определено, то $AE = A$ [соответственно $EA = A$].

Определение

Линейным уравнением (или *уравнением 1-го порядка*) с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами* при неизвестных, а число b — *свободным членом* уравнения.

Система линейных уравнений записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Определение

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* $(*)$.

Обозначим через A основную матрицу системы $(*)$ и положим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

X и B – матрицы, состоящие из одного столбца. Столбец X называется *столбцом неизвестных*, а столбец B – *столбцом свободных членов*. Система $(*)$ равносильна матричному равенству $AX = B$. Это равенство называется *матричной записью системы линейных уравнений* $(*)$.

Итак, с помощью умножения матриц мы смогли записать произвольную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{$*$}$$

в компактном матричном виде

$$AX = B. \tag{$**$}$$

Можно ли использовать матрицы не только для упрощения записи, но и для *решения* системы $(*)$?
Всегда ли у матричного уравнения $(**)$ имеются решения?
Сколько может быть решений?
Как найти все решения, если они существуют?
(Самый важный вопрос!) Как найти все решения, если они не существуют?

Почему важно решать несовместные системы линейных уравнений?

Системы линейных уравнений, взятые из реальных задач, обычно *переопределены* (число уравнений много больше числа неизвестных). Инженеры (геологи, физики, ...) полагают, что чем больше сделано измерений, тем достоверней будет результат. Однако из-за погрешностей измерения и ошибок округления получающиеся системы линейных уравнений *несовместны*. Понятно, что ответ «Ваша система не имеет решений» не удовлетворит инженера (геолога, физика, ...) – уравнения описывают некоторый реально существующий объект, т.е. решение *есть*!
Именно поэтому надо уметь решать несовместные системы.
Мы научимся это делать (но не сразу).