Ядро и образ линейного оператора

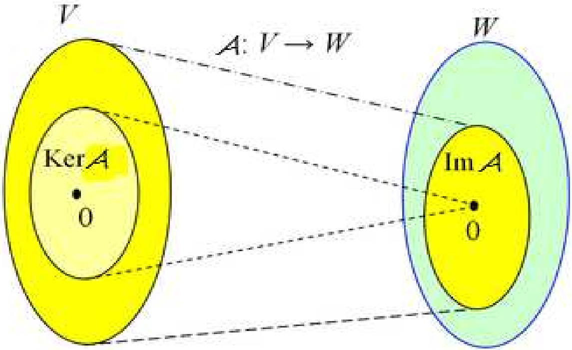
Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над одним и тем же полем F, $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор.
Образ $\mathcal{A}$ – это множество $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ всех векторов $\mathbf{y} \in W$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$.
Ядро $\mathcal{A}$ – это множество $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ всех векторов $\mathbf{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.



Замечание об образе и ядре

Пусть V и W – векторные пространства над одним и тем же полем F, $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор. Тогда $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – подпространство в W, а $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ – подпространство в V.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, а $t \in F$. Тогда существуют вектора $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad t\mathbf{y}_1 = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1).$$

Это означает, что $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, t\mathbf{y}_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ – подпространство.

Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, а $t \in F$. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Отсюда $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ – подпространство. $\square$

Замечание об образе конечномерного пространства

Если $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ *– линейный оператор, причем* V *– конечномерное пространство, то и подпространство* $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ *конечномерно.*

Доказательство. Если $\dim V = 0$, доказывать нечего. Пусть $\dim V = n > 0$ и $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ – какой-то базис пространства V. Покажем, что подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ порождается векторами $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, $\ldots$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$. Возьмем любой вектор $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$. По определению существует $\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – координаты $\mathbf{x}$ в базисе P, то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n$, откуда

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n).$$

Итак, подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ имеет конечную систему образующих, а значит, оно конечномерно. $\square$

Определение

Пусть $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор, причем V конечномерно. Размерность образа линейного оператора $\mathcal{A}$ называется *рангом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $r(\mathcal{A})$, а размерность ядра оператора $\mathcal{A}$ называется *дефектом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $d(\mathcal{A})$.

Теорема о сумме ранга и дефекта

Пусть $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор, причем V конечномерно. Сумма ранга и дефекта оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства V.

Доказательство. Пусть дефект оператора $\mathcal{A}$ равен d, а его ранг равен r. Выберем базис ядра $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d$ и базис образа $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$. Для каждого $\mathbf{c}_i$ найдётся вектор $\mathbf{b}_i \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$. Докажем, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ (*) – базис пространства V. Сначала проверим, что (*) – система образующих. Для произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$, его образ $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ выражается через базис образа:

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t_1\mathbf{c}_1 + t_2\mathbf{c}_2 + \dots + t_r\mathbf{c}_r.$$

Положим $\mathbf{x}' := t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \dots + t_r\mathbf{b}_r$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}')$, и потому $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0}$. Значит, $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ выражается через базис ядра:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}' = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_d\mathbf{a}_d.$$

Поэтому

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{x}' = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_d\mathbf{a}_d + t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \dots + t_r\mathbf{b}_r.$$

Теорема о сумме ранга и дефекта (2)

Теперь докажем линейную независимость системы (*). Пусть

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_d\mathbf{a}_d + t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_r\mathbf{b}_r = \mathbf{0}. \qquad (\triangle)$$

Применим оператор $\mathcal{A}$ к обеим частям равенства $(\triangle)$. Поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{a}_j) = \mathbf{0}$, а $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$, получаем:

$$\mathcal{A}(s_1\mathbf{a}_1+s_2\mathbf{a}_2+\cdots+s_d\mathbf{a}_d+t_1\mathbf{b}_1+t_2\mathbf{b}_2+\cdots+t_r\mathbf{b}_r) = t_1\mathbf{c}_1+t_2\mathbf{c}_2+\cdots+t_r\mathbf{c}_r = \mathbf{0}.$$

Вектора $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ линейно независимы, поэтому $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$. От равенства $(\triangle)$ остается

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_d\mathbf{a}_d = \mathbf{0},$$

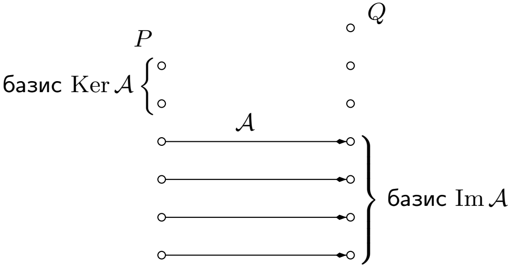
но $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d$ линейно независимы, поэтому $s_1 = s_2 = \cdots = s_d = 0$.

Итак, система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ – базис пространства V, откуда $\dim V = r + d$. $\square$

Простейший вид матрицы оператора

Мы упоминали то, что матрица линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$, где V и W конечномерны, зависит от выбора базисов в пространствах V и W. Доказательство теоремы о сумме ранга и дефекта показывает, что базисы в V и W можно выбрать так, чтобы матрица $\mathcal{A}$ стала очень простой.

Действительно, пусть $\dim V = n$, $\dim W = k$, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = d$, $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = r$. Возьмем какой-нибудь базис $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ в $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и дополним его какими-то векторами $\mathbf{c}_{r+1}, \dots, \mathbf{c}_k$ до базиса Q пространства W.



Теперь, следуя доказательству теоремы о сумме ранга и дефекта, для каждого из векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ возьмём вектор $\mathbf{b}_i \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$, и добавим к системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_r$ какие-то d векторов, составляющих базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Получим базис P пространства V.

Как устроена матрица $A_{P,Q}$? Напомним: столбцы матрицы $A_{P,Q}$ – это координаты образов векторов из P в базисе Q.
По построению, $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$ для $i = 1, 2, \dots, r$, т.е. образ вектора $\mathbf{b}_i$ имеет координаты $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Остальные вектора из базиса P лежат в $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ и их образы имеют нулевые координаты. Поэтому матрица $A_{P,Q}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{k \times n},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.
Заметим еще, что число единичек зависит только от самого оператора $\mathcal{A}$ (оно равно рангу оператора) и не зависит от выбора базиса в $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и способа его достроения до базиса W. Аналогично, не важно, каким именно базисом $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ прообраз базиса $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ достраивается до базиса V.

Наша следующая цель – алгоритм, который позволяет одновременно найти базисы образа и ядра линейного оператора. Этот алгоритм важен и сам по себе, и как «подпрограмма» более сложных алгоритмов. Как и большинство алгоритмов линейной алгебры, он основан на *элементарных преобразованиях* над строками и столбцами матрицы.

Вот список преобразований, которые мы будем называть элементарными:

- I: Перестановка двух столбцов (строк).
- II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).
- III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

На практике элементарные преобразования II-го и III-го родов обычно комбинируют, чтобы прибавить к столбцу (строке) произведение другого столбца (другой строки) на ненулевой скаляр:

$$\begin{pmatrix}\dots & \mathbf{a}_i & \dots & \mathbf{a}_j & \dots\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}:\lambda\times j} \begin{pmatrix}\dots & \mathbf{a}_i & \dots & \lambda\mathbf{a}_j & \dots\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}:i+j}$$

$$\begin{pmatrix}\dots & \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j & \dots & \lambda\mathbf{a}_j & \dots\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}:\lambda^{-1}\times j} \begin{pmatrix}\dots & \mathbf{a}_i+\lambda\mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_j & \dots\end{pmatrix}$$

Замечание

Элементарные преобразования *обратимы*. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать, что каждое отдельное элементарное преобразование обратимо. Каждое преобразование I-го рода обратно само себе: если поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки) матрицы A, а в получившейся матрице снова поменять местами i-й и j-й столбцы (i-ю и j-ю строки), то вернемся к исходной матрице A.

Обратным к преобразованию II-го рода, которое прибавляет к i-му столбцу j-й столбец (к i-й строке j-ю строку), будет преобразование, которое вычитает из i-го столбца j-й столбец (из i-й строки j-ю строку). Выше показано, как скомбинировать такое вычитание из преобразований II-го и III-го родов.

Наконец, обратным к преобразованию III-го рода, которое умножает i-й столбец (i-ю строку) на скаляр $\lambda \neq 0$, будет преобразование, которое умножает i-й столбец (i-ю строку) на скаляр λ^{-1}. □

Замечание

Если строки матрицы A линейно независимы, то и строки матрицы A', полученной из матрицы A произвольной последовательностью элементарных преобразований над строками, линейно независимы.

Доказательство. Пусть S – линейная оболочка строк $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k$ матрицы A, а S' – линейная оболочка строк $\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_k$ матрицы A'. Сложение и перестановка строк, а также умножение строки на скаляр не выводят за пределы линейной оболочки, поэтому $S' \subseteq S$. Поскольку элементарные преобразования обратимы, верно и включение $S \subseteq S'$, откуда $S = S'$. Строки $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k$ линейно независимы, поэтому $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k$ – базис в S, откуда $\dim S = k$. Строки $\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_k$ – система образующих в $S' = S$, а в k-мерном пространстве любая система из k образующих – базис. Поэтому строки $\mathbf{s}'_1, \ldots, \mathbf{s}'_k$ линейно независимы. $\square$

Алгоритм нахождения базисов образа и ядра

Если поменять ролями строки и столбцы матрицы $A = (a_{ij})_{k\times n}$, получится *транспонированная* матрица $A^T = (a_{ji})_{n\times k}$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм Ядро-Образ

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, причем $\dim V = n > 0$, $\dim W = k > 0$, и $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор, заданный матрицей A в некоторых базисах P и Q пространств V и W. Припишем к $n \times k$-матрице A^T слева единичную $n \times n$-матрицу E и проделаем над **строками** $n \times (n+k)$-матрицы $E|A^T$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A^T к ступенчатой матрице C. Пусть B – матрица, получившаяся на месте матрицы E. Тогда:

(i) ненулевые строки матрицы C – координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ в базисе Q;

(ii) строки матрицы B с нулевыми продолжениями в матрице C – координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ в базисе P.

Пример. Найдем базисы образа и ядра оператора $\mathcal{A}$, имеющего в некоторых базисах матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Итак, строки $(1, 2, 3)$ и $(0, 1, 2)$ – координаты базисных векторов образа оператора $\mathcal{A}$, а строки $(1, -2, 1, 0)$ и $(2, -3, 0, 1)$ – координаты базисных векторов ядра этого оператора.

Обоснование алгоритма

Строки матрицы A^T – это столбцы матрицы A, т.е. координаты (в базисе Q пространства W) образов векторов $\mathbf{p}_i$ из базиса P пространства V.
Строки единичной матрицы – координаты **самих векторов** $\mathbf{p}_i$ в базисе P.
Итак, в $n \times (n+k)$-матрице $E|A^T$ часть каждой строки после черты – это результат применения оператора $\mathcal{A}$ к части той же строки до черты.
Линейный оператор сохраняет сложение и умножение на скаляры.
Поэтому элементарные преобразования сохраняют указанное свойство, и в матрице $B|C$, к которой приводит алгоритм, часть каждой строки после черты остается образом части той же строки до черты:
(**координаты вектора** $\mathbf{x}$ **в базисе** P | **координаты вектора** $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ **в базисе** Q)
В частности, ненулевые строки ступенчатой матрицы C – это линейно независимые вектора из $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если r' – число таких строк, то $r' \leq r(\mathcal{A})$.
Строки матрицы B линейно независимы, так как получены элементарными преобразованиями из строк единичной матрицы E.
Строки B с нулевыми продолжениями в матрице C – это линейно независимые вектора из $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Если d' – число таких строк, то $d' \leq d(\mathcal{A})$.
Имеем

$$n = r' + d' \leq r(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = n \quad \text{(по теореме о сумме ранга и дефекта).}$$

Поэтому $r' = r(\mathcal{A})$ и $d' = d(\mathcal{A})$.