Действия с линейными операторами

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

$$\left[\mathcal{A}(\mathbf{x})\right]_Q = A_{P,Q} \cdot [\mathbf{x}]_P.$$

Если мы знаем матрицу оператора, мы знаем и то, как действует оператор!

Линейные операторы конечномерных пространств можно (и нужно!) изучать с помощью матриц.

На матрицы можно смотреть как на «координаты» линейных операторов.

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы из V в W. *Суммой* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{S}\colon V \to W$, задаваемый правилом $\mathcal{S}(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Сумма операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначается через $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Множество всех линейных операторов из V в W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Предложение о свойствах суммы операторов

Сумма линейных операторов является линейным оператором. Множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ *с операцией сложения операторов является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t \in F$ имеем

$$\begin{gathered}
\mathcal{S}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y}) = \\
= \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) + \big(\mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{y})\big) = \mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathcal{S}(\mathbf{y}) \quad \text{и} \\
\mathcal{S}(t\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}) + \mathcal{B}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = t\mathcal{S}(\mathbf{x}).
\end{gathered}$$

Следовательно, оператор $\mathcal{S}$ линеен.

Далее, если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{Hom}(V, W)$, то

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned}\big((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}\big)(\mathbf{x}) &= (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) + \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \big(\mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + (\mathcal{B}+\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \\ &= \big(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})\big)(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

откуда $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$. Нулем является нулевой оператор $\mathcal{O}$, определяемый правилом $\mathcal{O}(\mathbf{x}) := \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Действительно,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{O})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

Противоположным к оператору $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ является оператор $-\mathcal{A}$, определяемый правилом $(-\mathcal{A})(\mathbf{x}) := -\mathcal{A}(\mathbf{x})$, поскольку

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}+(-\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + (-\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \big(-\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \mathcal{O}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор, а $t \in F$. *Произведением оператора $\mathcal{A}$ на скаляр t* называется оператор $\mathcal{B}\colon V \to W$, задаваемый правилом $\mathcal{B}(\mathbf{x}) := t\mathcal{A}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Произведение оператора $\mathcal{A}$ на скаляр t обозначается через $t\mathcal{A}$.

Предложение о пространстве линейных операторов

Произведение линейного оператора на скаляр является линейным оператором. Множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ с операциями сложения операторов и умножения оператора на скаляр является векторным пространством.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t, s \in F$. Тогда:

$$(t\mathcal{A})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = t(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}(\mathbf{y}) =$$
$$= (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (t\mathcal{A})(\mathbf{y}) \text{ и}$$
$$(t\mathcal{A})(s\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(s\mathbf{x})\big) = t\big(s\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big(t\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big((t\mathcal{A})(\mathbf{x})\big).$$

Следовательно, $t\mathcal{A}$ – линейный оператор.

Далее,

$$\begin{aligned}\big(t(\mathcal{A}+\mathcal{B})\big)(\mathbf{x}) &= t\big((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})\big) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = \\ &= t\mathcal{A}(\mathbf{x})+t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A})(\mathbf{x})+(t\mathcal{B})(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

т. е. $t(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = t\mathcal{A}+t\mathcal{B}$;

$$\begin{aligned}\big((t+s)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}) &= (t+s)\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x})+s\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \\ &= (t\mathcal{A})(\mathbf{x})+(s\mathcal{A})(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A}+s\mathcal{A})(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

т. е. $t\mathcal{A}+s\mathcal{A} = (t+s)\mathcal{A}$;

$$\big(t(s\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) = t\big((s\mathcal{A})(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \big((ts)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(s\mathcal{A}) = (ts)\mathcal{A}$; наконец,

$$(1\cdot\mathcal{A})(\mathbf{x}) = 1\cdot\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

т. е. $1\cdot\mathcal{A} = \mathcal{A}$. С учетом свойств сложения операторов, получаем, что в $\mathrm{Hom}(V,W)$ выполнены все аксиомы векторного пространства. $\square$

Теорема о пространствах линейных операторов и матриц

Если V и W – векторные пространства над полем F, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то векторное пространство $Hom(V, W)$ и векторное пространство $F^{k\times n}$ всех $k \times n$-матриц над F изоморфны.

Доказательство. Зафиксируем в V базис $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$, а в W – базис $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$. Определим отображение $\varphi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to F^{k\times n}$ правилом: если $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор, то $\varphi(\mathcal{A})$ – матрица оператора A в базисах P и Q. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $t \in F$. Надо проверить, что отображение φ биективно и выполнены равенства

$$\varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}) \text{ и } \varphi(t\mathcal{A}) = t\varphi(\mathcal{A}) \qquad (*).$$

В матрице $\varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ по столбцам записаны координаты векторов $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q, а в матрицах $\varphi(\mathcal{A})$ и $\varphi(\mathcal{B})$ – координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$ соответственно в том же базисе. Поскольку $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{p}_i) = \mathcal{A}(\mathbf{p}_i) + \mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$, координаты вектора $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ равны сумме координат векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$. Первое из равенств $(*)$ доказано. Второе из них проверяется вполне аналогично.

Изоморфизм векторных пространств линейных операторов и матриц (2)

Проверим, что отображение φ биективно. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ и $\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{B})$, то из определения матрицы линейного оператора вытекает, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинаково действуют на базисных векторах пространства V. Но тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, так как линейный оператор однозначно определяется своим действием на базисных векторах. Следовательно, отображение φ инъективно.

Осталось доказать, что φ сюръективно. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная матрица размера $k \times n$. Для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ положим $\mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{q}_1 + a_{2j}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kj}\mathbf{q}_k$. В силу теоремы существования и единственности линейного оператора существует линейный оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Из определения матрицы оператора вытекает, что $A_{P,Q} = A$, т.е. $\varphi(\mathcal{A}) = A$. Следовательно, отображение φ сюръективно. □

Как отмечалось, размерность пространства матриц размера $k \times n$ равна kn. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

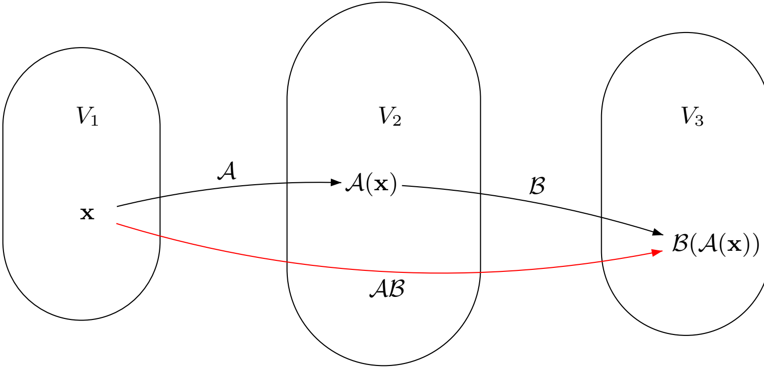
Следствие о размерности пространства линейных операторов

Если V и W – векторные пространства над полем F, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = kn$. □

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \text{ для всех } \mathbf{x} \in V_1.$$

Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Линейность произведения операторов

Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

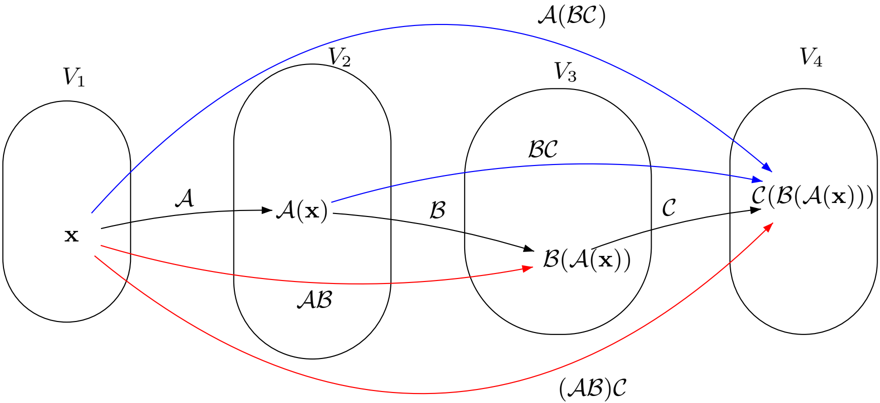
Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{AB}(\mathbf{x})+\mathcal{AB}(\mathbf{y}).$$

Так же проверяется, что $\mathcal{AB}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{AB}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $t \in F$. $\square$

Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



Ассоциативность – свойство композиции произвольных отображений.

Свойства умножения линейных операторов (2)

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$\begin{aligned}((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) &= \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x})) \\ &= \mathcal{A}\mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Аналогично проверяется дистрибутивность справа. $\square$

Дистрибутивность уже использует специфику линейных операторов; скажем, при композиции произвольных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ее нет. (*Докажите!*)

Свойства умножения линейных операторов (3)

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ *всех линейных операторов пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных операторов.*

Упражнения. 1. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим оператор дифференцирования: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Как действует квадрат оператора $\mathcal{D}$?

2. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ – оператор поворота плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол α. Как действует произведение $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta$?

3. Приведите пример двух линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, таких, что $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$.

4. Пусть $V = M_1 \oplus M_2$ – прямая сумма подпространств M_1 и M_2 и $\mathcal{P}\colon V \longrightarrow V$ – оператор проектирования на подпространство M_1 параллельно M_2. Как действует квадрат оператора $\mathcal{P}$?

Матрица произведения операторов

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу оператора имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \big[\mathcal{AB}(\mathbf{x})\big]_R = \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big]_R = B\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = B(A[\mathbf{x}]_P).$$

Матрица произведения операторов (2)

Напомним, как определялось произведение матрицы на столбец:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P)$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C. Итак, первый столбец матрицы C есть произведение матрицы B на первый столбец матрицы A.

Полагая в том же равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ и т.д., получим, что каждый столбец матрицы C есть произведение B на столбец матрицы A с тем же номером. Другими словами, элемент матрицы C, стоящий на месте i, j есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы B на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A (правило «строка на столбец»).

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H. Если $G = (g_{ij})_{p\times\ell}$, а $H = (h_{ij})_{\ell\times q}$, то *произведением* матриц G и H называется матрица $GH = (f_{ij})_{p\times q}$, где f_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы G на соответствующие элементы j-го столбца матрицы H:

$$f_{ij} := g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j} + \cdots + g_{i\ell}h_{\ell j} \ \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, q.$$

Возвращаясь к произведениям линейных операторов, заключаем, что при соответствии, которое сопоставляет линейному оператору его матрицу, выполнено равенство

$$[\mathcal{AB}]_{P,R} = [\mathcal{B}]_{Q,R}[\mathcal{A}]_{P,Q}.$$

⚠ Матрицы операторов перемножаются в порядке, обратном тому, в котором записаны операторы.