

Жорданова теория

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

На прошлой лекции мы зафиксировали следствие корневого разложения:

Следствие (Камилл Жордан, 1870)

Если $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – такой линейный оператор, что $\text{Spes } \mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, то в V можно выбрать базис из его корневых векторов. В этом базисе матрица оператора \mathcal{A} блочно-диагональна.

Число диагональных блоков равно $|\text{Spes } \mathcal{A}|$, размер блока, отвечающего $\alpha \in \text{Spes } \mathcal{A}$, равен кратности k корня α в характеристическом многочлене оператора \mathcal{A} , а блок равен $\alpha E_k + A_\alpha$, где A_α есть матрица ограничения оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha \mathcal{E}$ на его 0-компоненту V_α .

Если $\text{Spes } \mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ и $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = \pm(\lambda - \alpha_1)^{k_1} \dots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{k_1} + A_{\alpha_1} & O & \dots & O \\ O & \alpha_2 E_{k_2} + A_{\alpha_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \alpha_t E_{k_t} + A_{\alpha_t} \end{pmatrix}.$$

Остается понять, как выбрать такой базис корневого подпространства V_α , чтобы матрица нильпотентного оператора \mathcal{A}_α была устроена проще всего.

Предложение 1

Пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – нильпотентный линейный оператор. Тогда

- 1 для любого ненулевого \mathcal{A} -инвариантного подпространства $U \subseteq V$ имеет место строгое включение $\mathcal{A}U \subset U$;
- 2 если вектор $\mathbf{v} \in V$ и число s таковы, что $\mathcal{A}^s \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, а $\mathcal{A}^{s+1} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, то система $\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}, \dots, \mathcal{A}^s \mathbf{v}$ линейно независима и ее линейная оболочка W есть наименьшее \mathcal{A} -инвариантное подпространство, содержащее \mathbf{v} .

Доказательство. 1. Если $\mathcal{A}U = U$ для некоторого подпространства U , то $U = \mathcal{A}U = \mathcal{A}(\mathcal{A}U) = \mathcal{A}^2 U = \dots = \mathcal{A}^s U$ для любого натурального s . Поскольку некоторая степень \mathcal{A} – нулевой оператор, имеем $U = \{\mathbf{0}\}$, что вступает в противоречие с тем, что U – ненулевое подпространство.

2. Предположим, что $\lambda_0 \mathbf{v} + \lambda_1 \mathcal{A}\mathbf{v} + \dots + \lambda_s \mathcal{A}^s \mathbf{v} = \mathbf{0}$, причем не все скаляры λ_i равны нулю. Выберем наименьшее j со свойством $\lambda_j \neq 0$ и применим к этому равенству оператор \mathcal{A}^{s-j} . Получим $\lambda_j \mathcal{A}^s \mathbf{v} = \mathbf{0}$, что противоречит условиям $\lambda_j \neq 0$ и $\mathcal{A}^s \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Поэтому система $\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}, \dots, \mathcal{A}^s \mathbf{v}$ линейно независима. Ясно, что ее линейная оболочка W инвариантна относительно оператора \mathcal{A} и если какое-то \mathcal{A} -инвариантное подпространство содержит \mathbf{v} , то оно содержит и вектора $\mathcal{A}\mathbf{v}, \dots, \mathcal{A}^s \mathbf{v}$. \square

Определение

Система ненулевых векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ называется *нильслоем* относительно нильпотентного линейного оператора \mathcal{A} , если $\mathbf{v}_{j+1} = \mathcal{A}\mathbf{v}_j$ при каждом $j = 0, 1, \dots, s-1$ и $\mathcal{A}\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$.

Длиной нильслоя назовем количество векторов в нем, т.е. число $s+1$.

В силу предложения 1 любой нильслои – линейно независимая система.

Из любого ненулевого вектора $\mathbf{v} \in V$ можно “вытянуть” нильслои, полагая $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_{j+1} = \mathcal{A}\mathbf{v}_j$ для $j = 0, 1, \dots$ до появления нулевого вектора.

Длина любого нильслоя не превосходит *степени нильпотентности* оператора \mathcal{A} , т.е. наименьшего числа m такого, что $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$.

Степень нильпотентности, в свою очередь, не превосходит размерности пространства V , так как последовательность подпространств

$$V \supset \mathcal{A}V \supset \mathcal{A}^2V \supset \dots \supset \mathcal{A}^{m-1}V \supset \mathcal{A}^mV = \{\mathbf{0}\}$$

в силу предложения 1 строго убывающая.

Определение

Система векторов называется *жордановой* относительно линейного оператора \mathcal{A} , если она состоит из нильслоев, следующих друг за другом. *Жорданова таблица* – это запись жордановой системы, в которой нильслои записаны друг под другом и выровнены по правому краю.

Жорданова таблица имеет вид (вектора в нильслоях пронумерованы справа налево):

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{v}_{1s_1} & \mathbf{v}_{1s_1-1} & \dots & \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{11} & \\ & \mathbf{v}_{2s_2} & \dots & \mathbf{v}_{22} & \mathbf{v}_{21} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \mathbf{v}_{\ell s_\ell} & \mathbf{v}_{\ell s_\ell-1} & \mathbf{v}_{\ell s_\ell-2} & \dots & \mathbf{v}_{\ell 2} & \mathbf{v}_{\ell 1} \end{array} \quad (*)$$

Предложение 2

Жорданова система линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независимы вектора последнего столбца соответствующей жордановой таблицы.

Доказательство. Необходимость. Подсистема линейно независимой системы сама линейно независима, поэтому если жорданова система линейно независима, то и вектора последнего столбца ее жордановой таблицы линейно независимы.

Достаточность. Предположим, что вектора жордановой таблицы (*) линейно зависимы. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{s_k} \lambda_{kj} \mathbf{v}_{kj} = \mathbf{0},$$

в которой не все скаляры равны 0. Выберем наибольшее значение j такое, что $\lambda_{kj} \neq 0$ при некотором $1 \leq k \leq \ell$ и зафиксируем соответствующее значение k . Применим оператор \mathcal{A}^{j-1} . Все слои с длиной меньше s_k обнулятся, а из r -го слоя с длиной не меньше s_k в получившуюся комбинацию войдет только вектор $\mathcal{A}^{j-1} \mathbf{v}_{rj} = \mathbf{v}_{r1}$. Следовательно, получим нулевую комбинацию векторов последнего столбца

$$\sum_{1 \leq r \leq \ell, s_r \geq s_k} \lambda_{rj} \mathbf{v}_{r1} = \mathbf{0},$$

в которой участвует коэффициент $\lambda_{kj} \neq 0$. □

Определение (элементарные преобразования жордановой таблицы)

- 1 Прибавление к строке конечного фрагмента такой же длины другой, не менее длинной строки, умноженного на скаляр, с выравниванием по правому краю при необходимости.
- 2 Умножение всех векторов одной строки на ненулевой скаляр.
- 3 Перестановка строк.

Так, в таблице (*) $s_1 \geq s_2$. Можно взять скаляр γ и заменить строку $\mathbf{v}_{2s_2}, \dots, \mathbf{v}_{22}, \mathbf{v}_{21}$ на строку $\mathbf{v}_{2s_2} + \gamma\mathbf{v}_{1s_2}, \dots, \mathbf{v}_{22} + \gamma\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{21} + \gamma\mathbf{v}_{11}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{v}_{1s_1} & \dots & \mathbf{v}_{1s_2} & \dots & \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{11} & \dots & \mathbf{v}_{1s_2} & \dots & \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{11} \\ \mathbf{v}_{2s_2} & \dots & \mathbf{v}_{22} & \mathbf{v}_{21} & \implies & \mathbf{v}_{2s_2} + \gamma\mathbf{v}_{1s_2} & \dots & \mathbf{v}_{22} + \gamma\mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{21} + \gamma\mathbf{v}_{11} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Если один или несколько последних векторов окажутся нулевыми, сдвинем ненулевые вектора вправо, чтобы выровнять таблицу по правому краю.

Предложение 3

Элементарные преобразования сохраняют свойство таблицы быть жордановой и ее линейную оболочку.

Жордановым базисом относительно нильпотентного линейного оператора $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ называется базис пространства V , являющийся жордановой системой относительно оператора \mathcal{A} .

Теорема (жорданов базис нильпотентного оператора)

Пусть V – ненулевое конечномерное пространство, $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – нильпотентный линейный оператор. Тогда V имеет жорданов базис относительно \mathcal{A} .

Доказательство. Выберем в пространстве V некоторый базис e_1, \dots, e_n и “вытянем” из каждого базисного вектора e_j нильслой $e_{j1} = e_j, e_{j2} = \mathcal{A}e_{j1}, \dots, e_{js_j} = \mathcal{A}e_{js_j-1}$ так, что $e_{js_j} \neq \mathbf{0}, \mathcal{A}e_{js_j} = \mathbf{0}$. Система из полученных нильслоев порождает V , так как включает базис e_1, \dots, e_n . Если она линейно независима, то является жордановым базисом. Если она линейно зависима, запишем ее как жорданову таблицу. По предложению 2 вектора последнего столбца таблицы линейно зависимы. Пусть $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_{js_j} = \mathbf{0}$ – нетривиальная нулевая комбинация этих векторов. Выберем индекс k так, чтобы длина s_k слоя с номером k была наименьшей среди всех чисел s_ℓ таких, что $\lambda_\ell \neq 0$.

Используя равенство $\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{e}_{js_j} = \mathbf{0}$, выразим вектор \mathbf{e}_{ks_k} через остальные векторы последнего столбца: $\mathbf{e}_{ks_k} = \sum_{\ell \neq k} \mu_{\ell} \mathbf{e}_{\ell s_{\ell}}$. В силу выбора k для всех слагаемых $\mu_{\ell} \mathbf{e}_{\ell s_{\ell}}$ в правой части этого равенства, для которых $\mu_{\ell} \neq 0$, длина ℓ -й строки жордановой таблицы не меньше длины k -й строки. Поэтому для каждой такой строки можно прибавить ее конечный фрагмент длины s_k , умноженный на $-\mu_{\ell}$, к k -й строке. После этих преобразований в k -й строке последний вектор станет равным $\mathbf{0}$. Сдвинув эту строку вправо для исключения нулевых векторов, получим жорданову систему, содержащую по крайней мере на один вектор меньше, чем предыдущая. В силу предложения 3 линейная оболочка полученной жордановой таблицы совпадает с V . Если полученная жорданова система линейно независима, то она и будет жордановым базисом. В случае линейной зависимости применяем к ней то же самое рассуждение.

На каждом шаге описанного процесса получается жорданова система с меньшим, чем предыдущая, числом векторов, порождающая V . Поскольку исходная система содержит конечное число ($\leq n^2$) векторов, процесс завершится на некоторой линейно независимой жордановой системе, порождающей пространство V , т.е. на жордановом базисе. □

Пусть $\mathbf{e}_{11}, \dots, \mathbf{e}_{1s_1}; \mathbf{e}_{21}, \dots, \mathbf{e}_{2s_2}; \dots; \mathbf{e}_{k1}, \dots, \mathbf{e}_{ks_k}$ – жорданов базис пространства V относительно нильпотентного оператора \mathcal{A} с выделенными нильслоями. Тогда

$$V = \langle \mathbf{e}_{11}, \dots, \mathbf{e}_{1s_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_{21}, \dots, \mathbf{e}_{2s_2} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{e}_{k1}, \dots, \mathbf{e}_{ks_k} \rangle.$$

Согласно предложению 1 каждый нильслой порождает \mathcal{A} -инвариантное подпространство, откуда матрица \mathcal{A} имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

где A_j – матрица ограничения оператора \mathcal{A} на $\langle \mathbf{e}_{j1}, \dots, \mathbf{e}_{js_j} \rangle$. Так как $\mathcal{A}\mathbf{e}_{j\ell} = \mathbf{e}_{j\ell+1}$ при $\ell = 1, \dots, s_j - 1$ и $\mathcal{A}\mathbf{e}_{js_j} = \mathbf{0}$, имеем

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{s_j \times s_j}.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{s_j \times s_j}$$

называется *жордановой клеткой порядка* s_j с собственным значением 0.

Итак, матрица нильпотентного оператора в жордановом базисе блочно-диагональна, а диагональные блоки являются жордановыми клетками с собственным значением 0, причем число клеток равно числу нильслоев базиса, а размеры клеток равны длинам нильслоев.

Докажем, что такая матрица определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на главной диагонали, т.е. не зависит от выбора жорданова базиса.

Для этого покажем, что для фиксированного нильпотентного оператора число нильслоев и их длины одни и те же во всех жордановых базисах.

Формула для числа нильслоев данной длины

Пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – нильпотентный линейный оператор на пространстве размерности $n > 0$. Возьмем жорданов базис B в V относительно \mathcal{A} и обозначим через q_j число его нильслоев длины j , $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$n = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \dots + nq_n.$$

Подпространство $\text{Im } \mathcal{A}$ порождается образом B . Под действием \mathcal{A} каждый нильслою $e_{i s_i}, \dots, e_{i1}$ из B переходит в нильслою $e_{i s_i - 1}, \dots, e_{i1}$:

$$\begin{array}{cccccc} e_{1s_1} & e_{1s_1-1} & e_{1s_1-1} \dots e_{12} & e_{11} & & e_{1s_1-1} & e_{1s_1-1} \dots e_{12} & e_{11} \\ & e_{2s_2} & e_{2s_2-1} \dots e_{22} & e_{21} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & e_{2s_2-1} \dots e_{22} & e_{21} & \\ & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Видим, что правый столбец жордановой таблицы для $\mathcal{A}B$ есть подсистема правого столбца жордановой таблицы для B . Из предложения 2 вытекает, что $\mathcal{A}B$ – линейно независимая система и, следовательно, базис для $\text{Im } \mathcal{A}$. Обозначая $\dim \text{Im } \mathcal{A}$, т.е. ранг \mathcal{A} , через r_1 , имеем

$$r_1 = q_2 + 2q_3 + \dots + (n-1)q_n.$$

Формула для числа нильслоев данной длины (2)

Применяя тот же аргумент, получаем, что $\mathcal{A}^2 B$ – базис для $\text{Im } \mathcal{A}^2$, откуда

$$r_2 = q_3 + 2q_4 + \cdots + (n - 2)q_n,$$

где r_2 – ранг \mathcal{A}^2 . В общем случае, обозначая ранг \mathcal{A}^j через r_j и (для единообразия) n через r_0 , получаем для каждого j равенство

$$r_j = q_{j+1} + 2q_{j+2} + \cdots + (n - j)q_n.$$

Вычитая из него $(j + 1)$ -е равенство из той же серии

$$r_{j+1} = q_{j+2} + 2q_{j+3} + \cdots + (n - j - 1)q_n,$$

получаем $r_j - r_{j+1} = q_{j+1} + q_{j+2} + \cdots + q_n$. Отсюда

$$q_j = (r_{j-1} - r_j) - (r_j - r_{j+1}) = r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}.$$

Итак, число нильслоев длины j в любом жордановом базисе пространства V относительно оператора \mathcal{A} равно $r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}$, где r_j – ранг \mathcal{A}^j при $j > 0$ и $r_0 = \dim V$. Поэтому длины нильслоев (а значит, и их число) однозначно определяются оператором и не зависят от выбора базиса.

Вернемся к рассмотрению произвольных линейных операторов $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, для которых $\text{Spec } \mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ содержится в поле скаляров.

Определение

Жорданов базис пространства V относительно линейного оператора \mathcal{A} – это объединение жордановых базисов корневых подпространств V_{α_j} относительно ограничений операторов $\mathcal{A} - \alpha_j \mathcal{E}$ для всех $j = 1, \dots, t$.

Из теоремы о корневом разложении и теоремы о жордановом базисе нильпотентного оператора вытекает основной результат:

Теорема Жордана, 1870

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, такого, что $\text{Spec } \mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, в пространстве V существует жорданов базис.

Следствие (матричная форма теоремы Жордана)

Пусть $A: V \rightarrow V$ – линейный оператор и $\text{Спек } A$ содержится в поле скаляров. В жордановом базисе пространства V матрица оператора A блочно-диагональна, а диагональные блоки имеют вид

$$J(\alpha) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

где $\alpha \in \text{Спек } A$. Число таких блоков и их размеры однозначно определяются оператором и не зависят от выбора базиса.

Матрица вида $J(\alpha)$ называется *жордановой клеткой с собственным значением* α , а блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой – жордановы клетки, называется *нормальной жордановой формой*.

Итак, матрицу любого линейного оператора, спектр которого содержится в поле скаляров, можно привести к нормальной жордановой форме. Вспоминая, как связаны между собой матрицы одного и того же оператора в разных базисах, получаем, что любая квадратная матрица подобна нормальной жордановой форме, единственной с точностью до порядка клеток.

Критерий подобия матриц

Две квадратные матрицы подобны тогда и только тогда, когда их нормальные жордановы формы совпадают с точностью до порядка клеток.

Пусть A – матрица нильпотентного оператора. Как найти жорданов базис?

Приводим матрицу $(E|A^T)$ с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(E'|A')$, где A' – ступенчатая по строкам матрица. Аналогичным образом приводим матрицу $(E'|A'|A' \cdot A^T)$ к виду $(E''|A''|A''')$, где A''' – ступенчатая по строкам матрица.

Продолжаем этот процесс, пока при домножении на A^T не получится нулевая матрица. Полученные строки выравниваем по правому краю. Получилась жорданова таблица. Выражаем последний вектор самой короткой строки через остальные и обнуляем его, прибавляя к этой строке фрагменты более длинных строк, умноженные на подходящие скаляры. Сдвигаем строку вправо, чтобы отбросить нулевые вектора.

Повторяем до тех пор, пока число векторов в жордановой системе не станет равным размеру матрицы A . Полученная система и будет жордановым базисом относительно данного нильпотентного оператора.

Обоснование: строки матрицы E'' образуют базис, строки A'' – образы векторов этого базиса при действии A , строки A''' – образы образов, т.е. образы при действии A^2 , и т.д. Итак, из базисных векторов вытягиваются нильслои и полученная жорданова таблица перестраивается в линейно независимую жорданову таблицу.

Найти жорданов базис относительно нильпотентного оператора \mathcal{A} ,

заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

Составляем матрицу $(E|A^T)$ и приводим ее с помощью элементарных преобразований строк к нужному виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -6 \end{array} \right) \rightarrow$$

Пример (2)

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Видим, что вектора $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 0, 2)$ образуют базис $\text{Ker } \mathcal{A}$. Вычисляем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -3 & 8 \\ -1 & -2 & -4 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что $(0, 1, 2, -1, 4) = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \in \text{Ker } \mathcal{A}$.

Пример (3)

Запишем

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Так как $(0, 1, 2, -1, 4) \in \text{Ker } \mathcal{A}$, заключаем что $\mathcal{A}^3 = \mathcal{O}$. Составляем жорданову таблицу, выравнивая по правому краю строки последней матрицы с отброшенными нулевыми векторами и добавляя базис $\text{Ker } \mathcal{A}$. Затем выполняем элементарные преобразования жордановой таблицы.

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \rightarrow \\ & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \rightarrow \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ & & & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \rightarrow \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -1 & 1 & -2
 \end{array}$$

Таким образом, получаем жорданов базис из двух нильслоев $\mathbf{e}_{11} = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_{12} = (-1, 0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{e}_{13} = (0, 1, 2, -1, 4)$, $\mathbf{e}_{21} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{e}_{22} = (1, 0, -1, 1, -2)$.

В этом базисе исходный оператор \mathcal{A} имеет матрицу
$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix},$$

составленную из двух жордановых клеток:
$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$
 и
$$\begin{pmatrix}
 0 & 0 \\
 1 & 0
 \end{pmatrix}.$$