Замена базиса
Собственные вектора и собственные значения

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Матрица перехода от одного базиса к другому

Определение

Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем F, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n\}$ – два базиса этого пространства. *Матрицей перехода от базиса P к базису Q* называется $n \times n$-матрица, i-й столбец которой (для каждого $i = 1, 2, \dots, n$) есть координатный столбец вектора $\mathbf{q}_i$ в базисе P.

Матрица перехода от базиса P к базису Q обозначается через $T_{P \to Q}$.
Принято базис P называть *старым*, а базис Q – *новым*.
Итак, матрица перехода от старого базиса к новому строится из старых координат новых базисных векторов.

Через матрицу перехода можно связать между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах.

Предложение (формула замены координат)

Пусть P и Q – два базиса пространства V. Тогда для любого $\mathbf{x} \in V$

$$[\mathbf{x}]_P = T_{P \to Q}[\mathbf{x}]_Q.$$

Матрица обратного перехода

Итак, $\boxed{[\mathbf{x}]_P = T_{P\to Q}[\mathbf{x}]_Q}$. Меняя ролями P и Q, имеем $[\mathbf{x}]_Q = T_{Q\to P}[\mathbf{x}]_P$. Подставляя второе равенство в первое, получаем $[\mathbf{x}]_P = T_{P\to Q}T_{Q\to P}[\mathbf{x}]_P$. Выбирая в качестве $\mathbf{x}$ поочередно все вектора базиса P, получаем

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = T_{P\to Q}T_{Q\to P}\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} = T_{P\to Q}T_{Q\to P}\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

Отсюда $E = T_{P\to Q}T_{Q\to P}E = T_{P\to Q}T_{Q\to P}$. Мы доказали такой факт:

Предложение о матрице перехода

Пусть P и Q – два базиса пространства V. Матрица $T_{P\to Q}$ обратима и обратной к ней является матрица обратного перехода $T_{Q\to P}$.

Теорема (о замене матрицы)

Пусть V и W – конечномерные векторные пространства над полем F, P_1 и P_2 – базисы пространства V, Q_1 и Q_2 – базисы пространства W, а $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ – линейный оператор. Тогда

$$A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1\to P_2}.$$

Доказательство. Для любого вектора $\mathbf{x} \in V$ имеем

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{Q_2} = A_{P_2,Q_2}[\mathbf{x}]_{P_2} = A_{P_2,Q_2} T_{P_2\to P_1}[\mathbf{x}]_{P_1}.$$

С другой стороны,

$$[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{Q_2} = T_{Q_2\to Q_1}[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_{Q_1} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1}[\mathbf{x}]_{P_1}.$$

Итак, $A_{P_2,Q_2} T_{P_2\to P_1}[\mathbf{x}]_{P_1} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1}[\mathbf{x}]_{P_1}$. Выбирая в качестве $\mathbf{x}$ поочередно вектора базиса P_1, получаем $A_{P_2,Q_2} T_{P_2\to P_1} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1}$. Умножая справа на матрицу $T_{P_1\to P_2}$, обратную к $T_{P_2\to P_1}$, получаем $A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1\to P_2}$. □

Итак, $\boxed{A_{P_2,Q_2} = T_{Q_2\to Q_1} A_{P_1,Q_1} T_{P_1\to P_2}}$.

Важный частный случай: $V = W$. В этом случае $Q_1 = P_1$ и $Q_2 = P_2$, и пишут A_{P_1} вместо A_{P_1,P_1} и A_{P_2} вместо A_{P_2,P_2}. С учетом этого получаем

$$A_{P_2} = T_{P_2\to P_1} A_{P_1} T_{P_1\to P_2} = T^{-1}_{P_1\to P_2} A_{P_1} T_{P_1\to P_2}.$$

Определение

Квадратные матрицы A и B над некоторым полем F называются *подобными над F*, если существует невырожденная квадратная матрица T над F такая, что $B = T^{-1}AT$.

Таким образом, все матрицы одного и того же линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ подобны между собой.

Свойства линейных операторов выражаются теми свойствами матриц, которые *инвариантны относительно подобия*.

Задача о выборе самой «простой» матрице для данного оператора равносильна задаче о выборе самой простой матрицы в каждом классе подобных между собой матриц.

Терминология

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор на V. Вектор $\mathbf{x} \in V$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и существует скаляр $\lambda \in F$ такой, что

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \qquad (*)$$

Скаляр $\lambda \in F$, для которого существует вектор $\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и выполнено равенство $(*)$, называют *собственным значением* оператора $\mathcal{A}$.

При этом говорят, что собственный вектор $\mathbf{x}$ *принадлежит собственному значению* λ.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V над полем F. Зафиксируем некоторый базис пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Для произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ обозначим через x столбец его координат в выбранном базисе. Равенство $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ равносильно матричному равенству $Ax = \lambda x$. Если E – единичная матрица того же порядка, что и A, это равенство можно переписать в виде $Ax = \lambda Ex$ или $Ax - \lambda Ex = 0$, где 0 — нулевой столбец.

Последнее равенство можно переписать в виде системы линейных однородных уравнений с параметром λ:

$$(A - \lambda E)x = 0. \qquad (\star)$$

Выводы:

- *собственными векторами оператора $\mathcal{A}$ являются вектора, координатные столбцы которых суть ненулевые решения системы $(\star)$, и только они*;
- *собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ являются те значения параметра λ, при которых система $(\star)$ имеет ненулевые решения, и только они.*

Если $\dim V = n$, в системе $(A - \lambda E)x = 0$ по n уравнений и неизвестных. Такая система имеет ненулевые решения, если и только если ранг матрицы $A - \lambda E$ строго меньше n, т.е. если и только если $\det(A - \lambda E) = 0$.

Если $A = (a_{ij})$, то $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$ – многочлен n-й степени от λ. Он называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Замечание

Характеристические многочлены подобных матриц равны.

Доказательство. Пусть $B = T^{-1}AT$. Тогда

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda E) &= \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) \\ &= \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \det(T^{-1}) \det(A - \lambda E) \det T \\ &= \det(A - \lambda E) \det(T^{-1}) \det T = \det(A - \lambda E) \det(T^{-1}T) \\ &= \det(A - \lambda E).\end{aligned}$$

$\square$

Характеристический многочлен оператора (2)

Поскольку все матрицы одного и того же линейного оператора подобны между собой, у всех них один и тот же характеристический многочлен. Он называется *характеристическим многочленом оператора*.
Таким образом, собственные значения линейного оператора – это в точности корни его характеристического многочлена.

Замечания и примеры. 1) У линейного оператора на n-мерном пространстве не более n собственных значений (так как у многочлена n-й степени не более n корней).

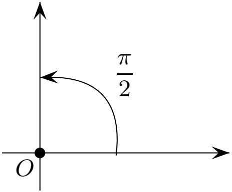
2) Характеристический многочлен матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ есть

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}-\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda).$$

Поэтому собственные значения оператора, матрица которого в некотором базисе диагональна, суть диагональные элементы этой матрицы.

Вопрос: каковы соответствующие собственные вектора?

3) Матрица поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ не имеет действительных корней. Следовательно, у поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ нет собственных значений и векторов (что геометрически очевидно).

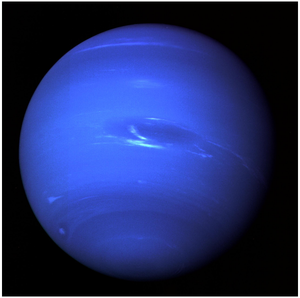
4) У любого линейного оператора обычного трехмерного пространства есть собственный вектор. Геометрически это отнюдь не очевидно, но сразу следует из наличия действительного корня у многочленов третьей степени.

5) В силу основной теоремы алгебры комплексных чисел у любого оператора на любом конечномерном пространстве над полем $\mathbb{C}$ есть собственные значения и собственные вектора.

Подытожим: чтобы найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора $\mathcal{A}$, нужно:

1) Взять матрицу A оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе.
2) Вычислить характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$.
3) Найти корни характеристического многочлена $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
4) Для каждого корня λ_i найти ненулевые решения системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_i E)x = 0$.

Шаги 1 и 4 понятны. Для шагов 2 и 3 имеются достаточно эффективные численные методы (для шага 2 – *метод Фаддеева–Леверрье*, для шага 3 – например, *метод Ньютона*).



Теорема

Собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Индукция по числу k векторов. База $k = 1$ обеспечивается тем, что собственный вектор по определению ненулевой. Пусть $k > 1$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ – собственные вектора оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Предположим, что для некоторых $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k$

$$s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Применив к этому равенству оператор $\mathcal{A}$, получим

$$s_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + s_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}\lambda_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\lambda_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Умножим (1) на λ_k и вычтем из (2). Получим

$$s_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + s_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ линейно независимы.

Из линейной независимости векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ и равенства

$$s_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + s_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

заключаем, что $s_1(\lambda_1 - \lambda_k) = s_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \cdots = s_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$. Поскольку скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ попарно различны, получаем, что $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = 0$. Но тогда $s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, откуда, учитывая, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ (поскольку вектор $\mathbf{x}_k$ собственный), получаем, что $s_k = 0$. □

Следствие

Если у линейного оператора $\mathcal{A}$ на n-мерном векторном пространстве V имеется n различных собственных значений, то в V существует базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Операторы с n различными собственными значениями называют *операторами простой структуры*.

В базисе из собственных векторов оператора его матрица диагональна, причем по диагонали идут собственные значения, которым принадлежат вектора базиса. Поэтому операторы, допускающие такой базис, называют *приводимыми к диагональному виду* или *диагонализируемыми*.

Из отмеченного выше следствия вытекает, что операторы простой структуры диагонализируемы.
Обратное, разумеется, неверно: например, тождественный оператор и нулевой оператор диагонализируемы, так как у каждого из них любой ненулевой вектор собственный.

Бывают ли недиагонализируемые операторы? Конечно, некоторые операторы недиагонализируемы из-за нехватки собственных значений. Например, оператор поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ недиагонализируем.

Но бывают и недиагонализируемые операторы, у которых есть собственные значения.
Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве квадратных трехчленов над $\mathbb{R}$. Матрица оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности 3. Собственные вектора оператора $\mathcal{D}$, принадлежащие 0, суть ненулевые константы, поэтому у $\mathcal{D}$ нет базиса из собственных векторов.