

Тема VII: Определители

§ 3. Приложения определителей

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Если матрица B обратна к матрице A , то $AB = E$.

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Если матрица B обратна к матрице A , то $AB = E$.
«Детерминируя» это равенство, т.е. записывая равенство определителей его левой и правой частей, получим $\det AB = \det E = 1$.

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Если матрица B обратна к матрице A , то $AB = E$. «Детерминируя» это равенство, т.е. записывая равенство определителей его левой и правой частей, получим $\det AB = \det E = 1$. По теореме $\det AB = \det A \cdot \det B$, откуда $\det A \cdot \det B = 1$, что влечет $\det A \neq 0$. \square

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Если матрица B обратна к матрице A , то $AB = E$. «Детерминируя» это равенство, т.е. записывая равенство определителей его левой и правой частей, получим $\det AB = \det E = 1$. По теореме $\det AB = \det A \cdot \det B$, откуда $\det A \cdot \det B = 1$, что влечет $\det A \neq 0$. \square

Докажем, что верно и обратное: если $\det A \neq 0$, то матрица A обратима.

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Если матрица B обратна к матрице A , то $AB = E$. «Детерминируя» это равенство, т.е. записывая равенство определителей его левой и правой частей, получим $\det AB = \det E = 1$. По теореме $\det AB = \det A \cdot \det B$, откуда $\det A \cdot \det B = 1$, что влечет $\det A \neq 0$. \square

Докажем, что верно и обратное: если $\det A \neq 0$, то матрица A обратима. Для этого понадобится следующая лемма:

Лемма «свой среди чужих»

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов *другой* строки равна нулю.

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если A и B – $n \times n$ -матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Следствие

Если матрица A обратима, то ее определитель отличен от 0.

Доказательство. Если матрица B обратна к матрице A , то $AB = E$. «Детерминируя» это равенство, т.е. записывая равенство определителей его левой и правой частей, получим $\det AB = \det E = 1$. По теореме $\det AB = \det A \cdot \det B$, откуда $\det A \cdot \det B = 1$, что влечет $\det A \neq 0$. \square

Докажем, что верно и обратное: если $\det A \neq 0$, то матрица A обратима. Для этого понадобится следующая лемма:

Лемма «свой среди чужих»

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов *другой* строки равна нулю.

В символах: если $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$ при всех $i \neq j$.

Доказательство леммы. Рассмотрим матрицу A' , которая получается из матрицы A заменой ее j -й строки на i -ю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим матрицу A' , которая получается из матрицы A заменой ее j -й строки на i -ю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\det A' = 0$, поскольку в матрице A' есть две равные строки.

Доказательство леммы. Рассмотрим матрицу A' , которая получается из матрицы A заменой ее j -й строки на i -ю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\det A' = 0$, поскольку в матрице A' есть две равные строки. С другой стороны, разложение $\det A'$ по j -й строке дает

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk}.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим матрицу A' , которая получается из матрицы A заменой ее j -й строки на i -ю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\det A' = 0$, поскольку в матрице A' есть две равные строки.

С другой стороны, разложение $\det A'$ по j -й строке дает

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk}.$$

Остается заметить, что $A'_{jk} = A_{jk}$ для всех $k = 1, \dots, n$, так как матрицы A' и A различаются лишь j -й строкой.

Доказательство леммы. Рассмотрим матрицу A' , которая получается из матрицы A заменой ее j -й строки на i -ю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\det A' = 0$, поскольку в матрице A' есть две равные строки.

С другой стороны, разложение $\det A'$ по j -й строке дает

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk}.$$

Остается заметить, что $A'_{jk} = A_{jk}$ для всех $k = 1, \dots, n$, так как матрицы A' и A различаются лишь j -й строкой. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk} = \det A' = 0.$$



Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\hat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\hat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\widehat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E.$$

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\hat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E.$$

Доказательство. Элемент произведения $A\hat{A}$, стоящий на месте (i, j) , равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы \hat{A} .

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\hat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E.$$

Доказательство. Элемент произведения $A\hat{A}$, стоящий на месте (i, j) , равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы \hat{A} . По определению, элементы j -го столбца матрицы \hat{A} — это алгебраические дополнения элементов j -й строки матрицы A .

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\widehat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E.$$

Доказательство. Элемент произведения $A\widehat{A}$, стоящий на месте (i, j) , равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы \widehat{A} . По определению, элементы j -го столбца матрицы \widehat{A} — это алгебраические дополнения элементов j -й строки матрицы A . Сумма произведений элементов i -й строки на алгебраические дополнения элементов j -й строки равна $\det A$ при $j = i$ (формула разложения по строке) и равна 0 при $j \neq i$ (лемма «свой среди чужих»).

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\hat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E.$$

Доказательство. Элемент произведения $A\hat{A}$, стоящий на месте (i, j) , равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы \hat{A} . По определению, элементы j -го столбца матрицы \hat{A} — это алгебраические дополнения элементов j -й строки матрицы A . Сумма произведений элементов i -й строки на алгебраические дополнения элементов j -й строки равна $\det A$ при $j = i$ (формула разложения по строке) и равна 0 при $j \neq i$ (лемма «свой среди чужих»). Поэтому у $A\hat{A}$ элементы главной диагонали равны $\det A$, а прочие элементы нулевые, т.е. $A\hat{A} = \det A \cdot E$.

Определение

Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ — матрица порядка $n > 1$. Матрица $\hat{A} := (A_{ij})^T$ называется *присоединенной* к матрице A .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E.$$

Доказательство. Элемент произведения $A\hat{A}$, стоящий на месте (i, j) , равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на элементы j -го столбца матрицы \hat{A} . По определению, элементы j -го столбца матрицы \hat{A} — это алгебраические дополнения элементов j -й строки матрицы A . Сумма произведений элементов i -й строки на алгебраические дополнения элементов j -й строки равна $\det A$ при $j = i$ (формула разложения по строке) и равна 0 при $j \neq i$ (лемма «свой среди чужих»). Поэтому у $A\hat{A}$ элементы главной диагонали равны $\det A$, а прочие элементы нулевые, т.е. $A\hat{A} = \det A \cdot E$. В силу равноправия строк и столбцов $\hat{A}A = \det A \cdot E$. \square

Из основного свойства присоединенной матрицы немедленно вытекает, что в случае, когда $\det A \neq 0$, матрица A обратима и ее обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}. \quad (*)$$

Определители и обращение матриц (4)

Из основного свойства присоединенной матрицы немедленно вытекает, что в случае, когда $\det A \neq 0$, матрица A обратима и ее обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}. \quad (*)$$

Формулой (*) удобно пользоваться для 2×2 -матриц, где она принимает вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Из основного свойства присоединенной матрицы немедленно вытекает, что в случае, когда $\det A \neq 0$, матрица A обратима и ее обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}. \quad (*)$$

Формулой (*) удобно пользоваться для 2×2 -матриц, где она принимает вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Для матриц более высокого порядка формула (*) вычислительно неэффективна по сравнению с методом Гаусса.

Из основного свойства присоединенной матрицы немедленно вытекает, что в случае, когда $\det A \neq 0$, матрица A обратима и ее обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}. \quad (*)$$

Формулой (*) удобно пользоваться для 2×2 -матриц, где она принимает вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Для матриц более высокого порядка формула (*) вычислительно неэффективна по сравнению с методом Гаусса. Тем не менее, она полезна: например, из нее следует, что элементы матрицы A^{-1} *непрерывно* зависят от элементов матрицы A .

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассуждения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассмотрения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;
- 2 A обратима справа;

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассуждения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;
- 2 A обратима справа;
- 3 A обратима и слева, и справа;

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассмотрения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;
- 2 A обратима справа;
- 3 A обратима и слева, и справа;
- 4 строки A линейно независимы;

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассмотрения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;
- 2 A обратима справа;
- 3 A обратима и слева, и справа;
- 4 строки A линейно независимы;
- 5 столбцы A линейно независимы;

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассмотрения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;
- 2 A обратима справа;
- 3 A обратима и слева, и справа;
- 4 строки A линейно независимы;
- 5 столбцы A линейно независимы;
- 6 $\det A \neq 0$.

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.
Подытожим наши рассуждения следующим утверждением:

Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы A следующие условия эквивалентны:

- 1 A обратима слева;
- 2 A обратима справа;
- 3 A обратима и слева, и справа;
- 4 строки A линейно независимы;
- 5 столбцы A линейно независимы;
- 6 $\det A \neq 0$.

Доказательство получается комбинированием фактов, доказанных в этой лекции и в лекции 4 темы V. □

Вернемся к произвольным (не обязательно квадратным) матрицам.

Вернемся к произвольным (не обязательно квадратным) матрицам.
Пусть A – $n \times k$ -матрица и $r \leq \min\{n, k\}$. *Минором порядка r* матрицы A называется определитель $r \times r$ -матрицы, стоящей на пересечении каких-то r строк матрицы A и каких-то ее r столбцов.

Вернемся к произвольным (не обязательно квадратным) матрицам.
Пусть A – $n \times k$ -матрица и $r \leq \min\{n, k\}$. *Минором порядка r* матрицы A называется определитель $r \times r$ -матрицы, стоящей на пересечении каких-то r строк матрицы A и каких-то ее r столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{-2} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Вернемся к произвольным (не обязательно квадратным) матрицам.
Пусть A – $n \times k$ -матрица и $r \leq \min\{n, k\}$. **Минором порядка r** матрицы A называется определитель $r \times r$ -матрицы, стоящей на пересечении каких-то r строк матрицы A и каких-то ее r столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{-2} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Рангом матрицы по минорам называется наибольший порядок ее ненулевых миноров.

Вернемся к произвольным (не обязательно квадратным) матрицам. Пусть A – $n \times k$ -матрица и $r \leq \min\{n, k\}$. **Минором порядка r** матрицы A называется определитель $r \times r$ -матрицы, стоящей на пересечении каких-то r строк матрицы A и каких-то ее r столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{-2} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Рангом матрицы по минорам называется наибольший порядок ее ненулевых миноров. Так, у матрицы на рисунке ранг по минорам 3.

Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

Доказательство. Пусть A – матрица ранга r и r_M – ее ранг по минорам.

Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

Доказательство. Пусть A – матрица ранга r и r_M – ее ранг по минорам. Имеем $r_M \leq r$, так как строки и столбцы, пересечение которых дает ненулевой минор, линейно независимы по критерию невырожденности.

Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

Доказательство. Пусть A – матрица ранга r и r_M – ее ранг по минорам. Имеем $r_M \leq r$, так как строки и столбцы, пересечение которых дает ненулевой минор, линейно независимы по критерию невырожденности. Обратно, возьмем r линейно независимых строк матрицы A и выбросим остальные строки.

Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

Доказательство. Пусть A – матрица ранга r и r_M – ее ранг по минорам. Имеем $r_M \leq r$, так как строки и столбцы, пересечение которых дает ненулевой минор, линейно независимы по критерию невырожденности.

Обратно, возьмем r линейно независимых строк матрицы A и выбросим остальные строки. Ранг получившейся матрицы A' равен r , и по теореме о ранге матрицы в A' есть r линейно независимых столбцов:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1j_1} & \dots & a'_{1j_r} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r1} & \dots & a'_{rj_1} & \dots & a'_{rj_r} & \dots & a'_{rn} \end{pmatrix}$$

Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

Доказательство. Пусть A – матрица ранга r и r_M – ее ранг по минорам. Имеем $r_M \leq r$, так как строки и столбцы, пересечение которых дает ненулевой минор, линейно независимы по критерию невырожденности.

Обратно, возьмем r линейно независимых строк матрицы A и выбросим остальные строки. Ранг получившейся матрицы A' равен r , и по теореме о ранге матрицы в A' есть r линейно независимых столбцов:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1j_1} & \dots & a'_{1j_r} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r1} & \dots & a'_{rj_1} & \dots & a'_{rj_r} & \dots & a'_{rn} \end{pmatrix}$$

Минор порядка r , стоящий в этих столбцах, отличен от 0 по критерию невырожденности, откуда $r_M \geq r$. □

Теорема (правило Крамера, 1750)

Если $\Delta \neq 0$, то система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (\diamond)$$

Доказательство. Существование и единственность решения при $\Delta \neq 0$ следуют из известных фактов. Проверим, что решение дается формулами (\diamond) , т.е. проверим равенство $Ax = b$, где $x = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta} \right)^T$.

i -я координата столбца Ax равна $\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta}$. В этом выражении разложим определитель Δ_1 по первому столбцу, определитель Δ_2 — по второму столбцу, \dots , определитель Δ_n — по n -му столбцу.

Учитывая, что в определителе Δ_j элемент b_k стоит на месте (k, j) , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

Учитывая, что в определителе Δ_j элемент b_k стоит на месте (k, j) , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \Delta & \text{при } k = i \text{ по формуле разложения по строке,} \\ 0 & \text{при } k \neq i \text{ по лемме «свой среди чужих».} \end{cases}$$

Учитывая, что в определителе Δ_j элемент b_k стоит на месте (k, j) , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \Delta & \text{при } k = i \text{ по формуле разложения по строке,} \\ 0 & \text{при } k \neq i \text{ по лемме «свой среди чужих».} \end{cases}$$

Поэтому сумма $\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$ сводится к $\frac{1}{\Delta} b_i \Delta = b_i$.

Учитывая, что в определителе Δ_j элемент b_k стоит на месте (k, j) , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \Delta & \text{при } k = i \text{ по формуле разложения по строке,} \\ 0 & \text{при } k \neq i \text{ по лемме «свой среди чужих».} \end{cases}$$

Поэтому сумма $\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$ сводится к $\frac{1}{\Delta} b_i \Delta = b_i$.

Итак, i -я координата столбца Ax равна b_i , т.е. $Ax = \mathbf{b}$. □

Учитывая, что в определителе Δ_j элемент b_k стоит на месте (k, j) , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \Delta & \text{при } k = i \text{ по формуле разложения по строке,} \\ 0 & \text{при } k \neq i \text{ по лемме «свой среди чужих».} \end{cases}$$

Поэтому сумма $\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$ сводится к $\frac{1}{\Delta} b_i \Delta = b_i$.

Итак, i -я координата столбца Ax равна b_i , т.е. $Ax = \mathbf{b}$. □

Здесь можно сделать замечание, аналогичное тому, которое делалось по поводу формулы для обратной матрицы: правило Крамера вычислительно неэффективно по сравнению с методом Гаусса, но теорема Крамера имеет важное теоретическое значение.

Определяемость многочлена n -й степени значениями в $n + 1$ точке

В качестве приложения теоремы Крамера рассмотрим следующую важную задачу.

В качестве приложения теоремы Крамера рассмотрим следующую важную задачу. Известны значения (вообще говоря, неизвестной) функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n : $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Нужно *интерполировать* $f(x)$, т.е. построить *многочлен* $p(x)$ наименьшей возможной степени, принимающий в данных точках указанные значения.

В качестве приложения теоремы Крамера рассмотрим следующую важную задачу. Известны значения (вообще говоря, неизвестной) функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n : $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Нужно *интерполировать* $f(x)$, т.е. построить *многочлен* $p(x)$ наименьшей возможной степени, принимающий в данных точках указанные значения. Будем искать $p(x)$ в виде $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Определимость многочлена n -й степени значениями в $n + 1$ точке

В качестве приложения теоремы Крамера рассмотрим следующую важную задачу. Известны значения (вообще говоря, неизвестной) функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n : $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Нужно **интерполировать** $f(x)$, т.е. построить **многочлен** $p(x)$ наименьшей возможной степени, принимающий в данных точках указанные значения.

Будем искать $p(x)$ в виде $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Условия $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1, \dots, p(x_n) = y_n$ дают следующую систему линейных уравнений относительно коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ее основная матрица – это матрица Вандермонда порядка $n + 1$. Так как определитель Вандермонда от x_0, x_1, \dots, x_n отличен от 0, по теореме Крамера эта система имеет единственное решение.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные, а y_0, y_1, \dots, y_n – произвольные элементы поля F . Существует и притом только один многочлен $p(x) \in F[x]$ степени не выше n , такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные, а y_0, y_1, \dots, y_n – произвольные элементы поля F . Существует и притом только один многочлен $p(x) \in F[x]$ степени не выше n , такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Отметим одно простое, но важное следствие.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные, а y_0, y_1, \dots, y_n – произвольные элементы поля F . Существует и притом только один многочлен $p(x) \in F[x]$ степени не выше n , такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Отметим одно простое, но важное следствие.

В алгебре многочлены рассматривают как *формальные выражения*, и равенство двух многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ и $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ означает, что эти выражения совпадают, т.е. $n = k$ и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные, а y_0, y_1, \dots, y_n – произвольные элементы поля F . Существует и притом только один многочлен $p(x) \in F[x]$ степени не выше n , такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Отметим одно простое, но важное следствие.

В алгебре многочлены рассматривают как **формальные выражения**, и равенство двух многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ и $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ означает, что эти выражения совпадают, т.е. $n = k$ и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

В анализе многочлены над полем \mathbb{R} рассматривают как **функции** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и равенство двух многочленов $p(x) \in \mathbb{R}$ и $q(x) \in \mathbb{R}$ означает, что $p(\alpha) = q(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные, а y_0, y_1, \dots, y_n – произвольные элементы поля F . Существует и притом только один многочлен $p(x) \in F[x]$ степени не выше n , такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Отметим одно простое, но важное следствие.

В алгебре многочлены рассматривают как **формальные выражения**, и равенство двух многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ и $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ означает, что эти выражения совпадают, т.е. $n = k$ и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

В анализе многочлены над полем \mathbb{R} рассматривают как **функции** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и равенство двух многочленов $p(x) \in \mathbb{R}$ и $q(x) \in \mathbb{R}$ означает, что $p(\alpha) = q(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Понятно, что для любого поля F каждый многочлен $p(x) \in F[x]$ определяет функцию $F \rightarrow F$ по правилу $\alpha \mapsto p(\alpha)$.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n – попарно различные, а y_0, y_1, \dots, y_n – произвольные элементы поля F . Существует и притом только один многочлен $p(x) \in F[x]$ степени не выше n , такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Отметим одно простое, но важное следствие.

В алгебре многочлены рассматривают как **формальные выражения**, и равенство двух многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ и $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$ означает, что эти выражения совпадают, т.е. $n = k$ и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

В анализе многочлены над полем \mathbb{R} рассматривают как **функции** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, и равенство двух многочленов $p(x) \in \mathbb{R}$ и $q(x) \in \mathbb{R}$ означает, что $p(\alpha) = q(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Понятно, что для любого поля F каждый многочлен $p(x) \in F[x]$ определяет функцию $F \rightarrow F$ по правилу $\alpha \mapsto p(\alpha)$.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым **бесконечным** полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно над бесконечным полем F , которые равны как функции.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно над бесконечным полем F , которые равны как функции. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq k$.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно над бесконечным полем F , которые равны как функции. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq k$. Выберем попарно различные элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$ (это можно сделать, поскольку F бесконечно).

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно над бесконечным полем F , которые равны как функции. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq k$. Выберем попарно различные элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$ (это можно сделать, поскольку F бесконечно). По условию $p(x_i) = q(x_i)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно над бесконечным полем F , которые равны как функции. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq k$. Выберем попарно различные элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$ (это можно сделать, поскольку F бесконечно). По условию $p(x_i) = q(x_i)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. В силу теоремы многочлен степени не выше n однозначно определяется своими значениями на элементах x_0, x_1, \dots, x_n , откуда $p(x) = q(x)$. \square

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

Доказательство. Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно над бесконечным полем F , которые равны как функции. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq k$. Выберем попарно различные элементы $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$ (это можно сделать, поскольку F бесконечно). По условию $p(x_i) = q(x_i)$ для всех $i = 0, 1, \dots, n$. В силу теоремы многочлен степени не выше n однозначно определяется своими значениями на элементах x_0, x_1, \dots, x_n , откуда $p(x) = q(x)$. \square

Отметим, что для многочленов над конечными полями их равенство как функций, вообще говоря, не влечет их равенство как формальных выражений. Например, над двухэлементным полем $\mathbb{F} = \{0, 1\}$ многочлены x и x^2 определяют одну и ту же функцию.

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен $p(x)$ степени не выше n по заданным значениям y_0, y_1, \dots, y_n в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n .

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен $p(x)$ степени не выше n по заданным значениям y_0, y_1, \dots, y_n в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n . Соответствующую процедуру (как и многие другие алгоритмы в алгебре и анализе) предложил Жозеф Луи Лагранж.

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен $p(x)$ степени не выше n по заданным значениям y_0, y_1, \dots, y_n в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n . Соответствующую процедуру (как и многие другие алгоритмы в алгебре и анализе) предложил Жозеф Луи Лагранж.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ положим

$$p_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен $p(x)$ степени не выше n по заданным значениям y_0, y_1, \dots, y_n в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n . Соответствующую процедуру (как и многие другие алгоритмы в алгебре и анализе) предложил Жозеф Луи Лагранж.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ положим

$$p_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

Видно, что $p_i(x)$ – многочлен степени n , $p_i(x_i) = 1$ и $p_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$.

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен $p(x)$ степени не выше n по заданным значениям y_0, y_1, \dots, y_n в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n . Соответствующую процедуру (как и многие другие алгоритмы в алгебре и анализе) предложил Жозеф Луи Лагранж.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ положим

$$p_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

Видно, что $p_i(x)$ – многочлен степени n , $p_i(x_i) = 1$ и $p_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа – это многочлен

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + \dots + y_n p_n(x).$$

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен $p(x)$ степени не выше n по заданным значениям y_0, y_1, \dots, y_n в попарно различных точках x_0, x_1, \dots, x_n . Соответствующую процедуру (как и многие другие алгоритмы в алгебре и анализе) предложил Жозеф Луи Лагранж.

Для каждого $i = 0, 1, \dots, n$ положим

$$p_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

Видно, что $p_i(x)$ – многочлен степени n , $p_i(x_i) = 1$ и $p_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа – это многочлен

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + \dots + y_n p_n(x).$$

По построению $p(x_i) = y_i$ для всякого $i = 0, 1, \dots, n$, а степень многочлена $p(x)$ не превосходит n .