Тема VII: Определители

§ 2. Дальнейшие свойства определителей

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

На прошлой лекции мы ввели аксиомы определителя и показали, что отображение $M_n(F) \to F$, удовлетворяющее этим аксиомам, существует и определяется ими однозначно.

Сегодня мы познакомимся с некоторыми важными фактами теории определителей, но сначала добавим несколько небольших замечаний к материалу предыдущей лекции.

1. *Альтернативное обозначение*. Мы обозначили определитель матрицы A через $\det A$. В прошлом при работе с определителями 2-го и 3-го порядка определитель матрицы типа $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ обозначался через $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. Будем использовать такое обозначение и для определителей высших порядков.

2. *Терминология и ее история*. Обозначение $\det$ произведено от слова «determinant», переводом которого является термин «определитель». Термин «determinant» ввел Гаусс в 1801. Аксиомы определителя предложены Вейерштрассом (не позже 1864); он же ввел обозначение $\det$.

3. *Допустимые вольности речи*. Хотя матрица и ее определитель – это не одно и то же, для краткости говорят о элементах, строках и столбцах *определителя* $\det A$, подразумевая соответственно элементы, строки и столбцы матрицы A.

Связь с определителями 2-го и 3-го порядка

Знакомые нам определители 2-го и 3-го порядка, конечно, являются частными случаями общего понятия определителя.

Напомним, что существование определителей доказывалось индукцией по размеру матрицы через разложение по строке (*определитель есть сумма произведений элементов строки на их алгебраические дополнения*).

Разложение по, скажем, первой строке определителя $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ дает равенство

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d + b \cdot (-c) = ad - bc,$$

т.е. именно то равенство, которым вводился определитель 2-го порядка.

Аналогично, разложение по первой строке определителя $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ дает

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg),$$

что приводит к привычной формуле для определителя 3-го порядка.

Теорема

$\det A = \det A^T$.

Доказательство. Определим отображение $D\colon M_n(F) \to F$ правилом

$$D(A) := \det A^T.$$

Если проверить, что это отображение удовлетворяет аксиомам ΔI–ΔIII, теорема единственности даст равенство $D(A) = \det A$, которое и нужно.

Начнем с ΔIII. Имеем $D(E) = \det E^T = \det E = 1$. ✓

Проверим ΔI. Нужно показать, что если в матрице A какие-то два соседних столбца равны, то $D(A) = 0$. Два соседних столбца матрицы A – это две соседние строки матрицы A^T. Поэтому желаемое сводится к доказательству такой леммы:

Лемма

Если в $n \times n$-матрице B какие-то две соседние строки равны, то $\det B = 0$.

Лемма

Если в $n \times n$-матрице B какие-то две соседние строки равны, то $\det B = 0$.

Доказательство леммы. При $n = 1$ утверждение тривиализируется.

Пусть $n > 1$. Проведем индукцию по n.

База индукции $n = 2$. Определитель 2×2-матрицы с двумя равными строками имеет вид $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$ и, очевидно, равен 0.

Шаг индукции. Пусть $n > 2$ и в $n \times n$-матрице B равны k-я и $(k+1)$-я строки. Возьмем номер $i \neq k, k+1$ и разложим $\det B$ по i-й строке:

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} B_{ij},$$

где $B_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, а M_{ij} – определитель $(n-1) \times (n-1)$-матрицы, полученной при вычеркивании i-й строки и j-го столбца из B. В каждой такой $(n-1) \times (n-1)$-матрице есть две соседние равные строки, и, значит, $M_{ij} = 0$ по предположению индукции. Отсюда $\det B = 0$. □

Лемма доказана; тем самым, проверена аксиома ΔI. ✓

Наконец, проверим ΔII. Пусть i-й столбец матрицы A представлен в виде суммы двух столбцов: $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a'_{1i} + a''_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a'_{k\,i} + a''_{k\,i} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a'_{ni} + a''_{n\,i} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Рассмотрим матрицы A' и A'', у которых элементы i-го столбца суть a'_{ki} и соответственно a''_{ki}, $k = 1, 2, \dots, n$, а остальные столбцы те же, что у A. Нужно проверить, что $D(A) = D(A') + D(A'')$, т.е. $\det A^T = \det A'^T + \det A''^T$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{k1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{1i} + a''_{1i} & \dots & a'_{ki} + a''_{ki} & \dots & a'_{ni} + a''_{n\,i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{kn} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложим $\det A^T$ по i-й строке, обозначая через B_{ik} алгебраическое дополнение элемента i-й строки и k-го столбца (оно одинаково для матриц A^T, A'^T и A''^T):

$$\det A^T = \sum_{k=1}^{n} (a'_{ki} + a''_{ki}) B_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} B_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a''_{ki} B_{ik} = \det A'^T + \det A''^T.$$

Мы проверили первую часть ΔII. Проверка второй части аналогична. ✓

Итак, отображение $D(A) := \det A^T$ удовлетворяет аксиомам ΔI–ΔIII. По теореме единственности $D(A) = \det A$, т.е. $\det A = \det A^T$. $\square$

Следствие теоремы симметрии – принцип равноправия строк и столбцов

Все свойства определителей, формулирующиеся для столбцов, верны и для строк, и наоборот. В частности:

- определитель равен сумме произведений элементов любого *столбца* на их алгебраические дополнения (*разложение по столбцу*).
- при элементарных преобразованиях I-го рода над *строками* определитель меняет знак, а элементарные преобразования II-го рода над *строками* не изменяют определитель.

Определение

Квадратная матрица L порядка n называется *верхней полураспавшейся*, если существуют квадратные матрицы A и B порядков p и q соответственно такие, что

$$L = \begin{pmatrix} A & N \\ O & B \end{pmatrix},$$

где O – нулевая $q \times p$-матрица, а N – какая-то $p \times q$-матрица.

Квадратная матрица L порядка n называется *нижней полураспавшейся*, если существуют квадратные матрицы A и B порядков p и q соответственно такие, что

$$L = \begin{pmatrix} A & O \\ N & B \end{pmatrix}$$

где O – нулевая $p \times q$-матрица, а N – какая-то $q \times p$-матрица.

A и B называются *диагональными блоками* полураспавшейся матрицы L.

Теорема об определителе полураспавшейся матрицы

Если L — полураспавшаяся матрица с диагональными блоками A и B, то $\det L = \det A \cdot \det B$.

Теорема об определителе полураспавшейся матрицы

Если L — полураспавшаяся матрица с диагональными блоками A и B, то $\det L = \det A \cdot \det B$.

Доказательство. В силу теоремы симметрии достаточно рассмотреть случай верхней полураспавшейся матрицы.

Пусть $L = \begin{pmatrix} A & N \\ O & B \end{pmatrix}$, где A и B – квадратные матрицы порядков p и q соответственно, O – нулевая $q \times p$-матрица, а N – какая-то $p \times q$-матрица. Зафиксируем матрицы B и N, а вместо матрицы A будем подставлять всевозможные матрицы из $M_p(F)$. Это позволяет определить отображение $D\colon M_p(F) \to F$ по правилу $D(A) := \det L$. Оно удовлетворяет $\Delta\mathrm{I}$ и $\Delta\mathrm{II}$. Действительно, если в матрице A какие-то два соседних столбца равны, то их продолжения в матрице L тоже равны, откуда $D(A) = \det L = 0$. Пусть i-й столбец матрицы A есть сумма двух столбцов, а A' и A''– матрицы, у которых i-й столбец заменен на первое и соответственно второе слагаемое. Продолжение i-го столбца матрицы A в матрице L есть сумма продолжений нулями i-х столбцов матриц A' и A''. Если L' и L'' – матрицы, получающиеся при подстановке матриц A' и A'' вместо A, то

$$D(A) = \det L = \det L' + \det L'' = D(A') + D(A'').$$

Мы проверили первую часть ΔII. Проверка второй части аналогична.

Итак, отображение $D(A) := \det L$ удовлетворяет аксиомам ΔI и ΔII. По следствию из теоремы единственности $D(A) = \det A \cdot D(E)$. Остается вычислить $D(E)$, т.е. определитель

$$\begin{vmatrix} E & N \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & n_{11} & \dots & n_{1q} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & n_{21} & \dots & n_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & n_{p1} & \dots & n_{pq} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & n_{21} & \dots & n_{2q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & n_{p1} & \dots & n_{pq} \\ 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qq} \end{vmatrix}.$$

Разложим его по 1-му столбцу, получившийся определитель снова разложим по 1-му столбцу и так проделаем p раз. В результате получим, что $D(E) = \det B$. Из равенств $D(A) = \det A \cdot D(E)$ и $D(E) = \det B$ заключаем, что $\det L = D(A) = \det A \cdot \det B$. $\square$

Теорема об определителе произведения матриц

Если A и B – $n \times n$-матрицы, то $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Это «мощное тождество» (по выражению Д.К.Фаддеева) нетривиально даже для случая $n = 2$, где оно в развернутом виде выглядит так:

$$(ad - bc)(xt - yz) = (ax + bz)(cy + dt) - (ay + bt)(cx + dz).$$

Идеи, близкие к теореме об определителе произведения матриц, возникали в упоминавшейся работе Гаусса (1801), но в полной общности эту теорему доказали (независимо друг от друга) Бине и Коши (1812).

Доказательство. Зафиксируем матрицу A, а вместо матрицы B будем подставлять всевозможные матрицы из $M_n(F)$. Это позволяет определить отображение $D\colon M_n(F) \to F$ по правилу $D(B) := \det AB$. Проверим, что оно удовлетворяет $\Delta\mathrm{I}$ и $\Delta\mathrm{II}$.

Заметим, что i-й столбец матрицы AB состоит из произведений строк матрицы A на i-й столбец матрицы B. Поэтому если у B равны i-й и $(i + 1)$-й столбцы, то и у произведения AB будут равны i-й и $(i + 1)$-й столбцы и $D(B) = \det AB = 0$. Итак, аксиома $\Delta\mathrm{I}$ выполнена.

Определитель произведения матриц (2)

По той же причине, если i-й столбец матрицы B имеет общий множитель или представлен в виде суммы двух столбцов, то же будет верно для i-го столбца произведения AB. В силу этого выполнена аксиома $\Delta\mathrm{II}$.
По следствию из теоремы единственности $D(B) = \det B \cdot D(E)$.
Но $D(E) = \det AE = \det A$. Итак,
$\det AB = \det B \cdot \det A = \det A \cdot \det B$. $\square$

Определение

Матрица Вандермонда порядка n – это матрица, строками которой являются n геометрических прогрессий длины n с первым членом 1. Ее определитель называется *определителем Вандермонда* порядка n.

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель Вандермонда. Для этого вычтем из последнего столбца предпоследний, умноженный на x_1, из $(n-1)$-го – $(n-2)$-й, умноженный на x_1, …, из i-го – $(i-1)$-й, умноженный на x_1, и так далее для всех столбцов. Эти преобразования не меняют определитель. Получим

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по первой строке, получаем, что

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \ldots & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \ldots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}.$$

Для всех i от 1 до $n-1$ вынесем из i-й строки множитель $x_{i+1}-x_1$. Получим

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Определитель в правой части – это определитель Вандермонда порядка $n-1$ от $x_2,\ldots,x_n$. Мы получили *рекуррентное соотношение*

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)V(x_2,\ldots,x_n).$$

Используя его, выразим $V(x_2,\ldots,x_n)$ через $V(x_3,\ldots,x_n)$, затем $V(x_3,\ldots,x_n)$ через $V(x_4,\ldots,x_n)$, и т.д., пока не дойдем до $V(x_{n-1},x_n)$.

Определитель Вандермонда (3)

Учитывая, что $V(x_{n-1}, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_{n-1} \\ 1 & x_n \end{vmatrix} = x_n - x_{n-1}$, окончательно получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Важное следствие

Определитель Вандермонда отличен от нуля тогда и только тогда, когда среди его аргументов нет равных между собой.