

Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

§ 2. Ортогональность

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Вектора x и y из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $xy = 0$.

Определение

Вектора x и y из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $xy = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны.

Определение

Вектора x и y из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $xy = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1.

Определение

Вектора x и y из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $xy = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1. Отношение ортогональности обозначим символом \perp , т.е. тот факт, что вектора x и y ортогональны, будем записывать в виде $x \perp y$.

Определение

Вектора x и y из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $xy = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1. Отношение ортогональности обозначим символом \perp , т.е. тот факт, что вектора x и y ортогональны, будем записывать в виде $x \perp y$.

Замечания

- 1 Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

Определение

Вектора x и y из пространства со скалярным произведением называются *ортогональными*, если $xy = 0$. Набор векторов называется *ортогональным*, если любые два различных вектора из этого набора ортогональны. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если длины всех векторов из этого набора равны 1. Отношение ортогональности обозначим символом \perp , т.е. тот факт, что вектора x и y ортогональны, будем записывать в виде $x \perp y$.

Замечания

- 1 Нулевой вектор ортогонален любому вектору.
- 2 В евклидовом пространстве два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда угол между этими векторами прямой.

Теорема Пифагора

Если \mathbf{a} и \mathbf{b} – ортогональные вектора в пространстве со скалярным произведением, то $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

Теорема Пифагора

Если \mathbf{a} и \mathbf{b} – ортогональные вектора в пространстве со скалярным произведением, то $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

Доказательство. Используя ортогональность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , имеем:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,$$

что и требовалось доказать. □

Теорема Пифагора

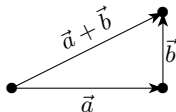
Если \mathbf{a} и \mathbf{b} – ортогональные вектора в пространстве со скалярным произведением, то $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

Доказательство. Используя ортогональность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , имеем:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,$$

что и требовалось доказать. □

В случае плоскости или обычного трехмерного пространства доказанное утверждение превращается в «обычную» теорему Пифагора из элементарной геометрии: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (см. рисунок).



Теорема Пифагора

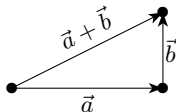
Если \mathbf{a} и \mathbf{b} – ортогональные вектора в пространстве со скалярным произведением, то $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

Доказательство. Используя ортогональность векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , имеем:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,$$

что и требовалось доказать. □

В случае плоскости или обычного трехмерного пространства доказанное утверждение превращается в «обычную» теорему Пифагора из элементарной геометрии: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (см. рисунок).



Вопрос: верно ли обратное утверждение, т.е. верно ли, что если $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, то вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны?

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i , $1 \leq i \leq k$.

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i , $1 \leq i \leq k$. Для каждого i умножим обе части этого равенства скалярно на \mathbf{a}_i . Имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i$$

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i , $1 \leq i \leq k$. Для каждого i умножим обе части этого равенства скалярно на \mathbf{a}_i . Имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i + \dots + t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i + \dots + t_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i$$

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i , $1 \leq i \leq k$. Для каждого i умножим обе части этого равенства скалярно на \mathbf{a}_i . Имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i + \dots + t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i + \dots + t_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i = t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$$

в силу ортогональности набора A .

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i , $1 \leq i \leq k$. Для каждого i умножим обе части этого равенства скалярно на \mathbf{a}_i . Имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i + \dots + t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i + \dots + t_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i = t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$$

в силу ортогональности набора A . Поскольку $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, имеем $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i \neq 0$, а значит, из равенства $t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i = 0$ вытекает, что $t_i = 0$. □

Теорема об ортогональности и линейной независимости

Любой ортогональный набор ненулевых векторов линейно независим.

Доказательство. Пусть $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ – ортогональный набор ненулевых векторов. Предположим что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров t_i , $1 \leq i \leq k$. Для каждого i умножим обе части этого равенства скалярно на \mathbf{a}_i . Имеем

$$0 = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1\mathbf{a}_i + t_2\mathbf{a}_2\mathbf{a}_i + \dots + t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i + \dots + t_k\mathbf{a}_k\mathbf{a}_i = t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$$

в силу ортогональности набора A . Поскольку $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, имеем $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i \neq 0$, а значит, из равенства $t_i\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i = 0$ вытекает, что $t_i = 0$. □

Следствие об ортонормированности и линейной независимости

Любой ортонормированный набор векторов линейно независим.

Определение

Ортогональный [ортонормированный] набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* [ортонормированным] *базисом*.

Определение

Ортогональный [ортонормированный] набор векторов, который является базисом, называется *ортгональным* [ортонормированным] *базисом*.

Примером ортонормированного базиса является стандартный базис

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

пространства \mathbb{R}^n (если скалярное произведение в \mathbb{R}^n определить как сумму произведений одноименных компонент).

Определение

Ортогональный [ортонормированный] набор векторов, который является базисом, называется *ортогональным* [ортонормированным] *базисом*.

Примером ортонормированного базиса является стандартный базис

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

пространства \mathbb{R}^n (если скалярное произведение в \mathbb{R}^n определить как сумму произведений одноименных компонент).

Теорема о скалярном произведении в ортонормированном базисе

Пусть P – ортонормированный базис пространства V со скалярным произведением. Тогда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = [\mathbf{x}]_P^T \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P}.$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе P через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{a}_1 + y_2 \mathbf{a}_2 + \dots + y_n \mathbf{a}_n.$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе P через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Перемножая, получаем

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)(y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n)$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе P через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Перемножая, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\mathbf{y} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)(y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (x_i\mathbf{a}_i)(y_j\mathbf{a}_j)\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе P через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Перемножая, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\mathbf{y} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)(y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (x_i\mathbf{a}_i)(y_j\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\mathbf{a}_i^2 \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе P через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Перемножая, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\mathbf{y} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)(y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (x_i\mathbf{a}_i)(y_j\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\mathbf{a}_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим координаты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} в базисе P через (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) соответственно. Пусть базис P состоит из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n,$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Перемножая, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\mathbf{y} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n)(y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \dots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n (x_i\mathbf{a}_i)(y_j\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}\mathbf{a}_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i} = \\ &= [\mathbf{x}]_P^T \cdot \overline{[\mathbf{y}]_P}. \quad \square \end{aligned}$$

В евклидовом пространстве формула для вычисления скалярного произведения векторов x и y по их координатам в ортонормированном базисе принимает совсем простой вид:

$$xy = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

В евклидовом пространстве формула для вычисления скалярного произведения векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} по их координатам в ортонормированном базисе принимает совсем простой вид:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Из определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает, что в евклидовом пространстве справедливы также формулы

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}};$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

В евклидовом пространстве формула для вычисления скалярного произведения векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} по их координатам в ортонормированном базисе принимает совсем простой вид:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Из определений длины вектора, угла между векторами и расстояния между векторами немедленно вытекает, что в евклидовом пространстве справедливы также формулы

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}};$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Четыре последние формулы являются точными аналогами соответствующих формул из элементарной векторной алгебры.

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Мы докажем, что ответ на него положителен для *конечномерных* пространств.

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Мы докажем, что ответ на него положителен для *конечномерных* пространств. Ответ будет конструктивным. Он опирается на алгоритм, именуемый *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Мы докажем, что ответ на него положителен для *конечномерных* пространств. Ответ будет конструктивным. Он опирается на алгоритм, именуемый *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта)

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ – линейно независимая система векторов пространства со скалярным произведением V . Тогда в V существует ортогональная система ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Мы докажем, что ответ на него положителен для *конечномерных* пространств. Ответ будет конструктивным. Он опирается на алгоритм, именуемый *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта)

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ – линейно независимая система векторов пространства со скалярным произведением V . Тогда в V существует ортогональная система ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Доказательство. Индукция по n . Для $n = 1$ положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.

Естественно поставить вопрос о том, в любом ли пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис. Мы докажем, что ответ на него положителен для *конечномерных* пространств. Ответ будет конструктивным. Он опирается на алгоритм, именуемый *процессом ортогонализации Грама–Шмидта*.

Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта)

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ – линейно независимая система векторов пространства со скалярным произведением V . Тогда в V существует ортогональная система ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$.

Доказательство. Индукция по n . Для $n = 1$ положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$.

Пусть $1 \leq i < n$ и уже найден ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$. Ищем вектор \mathbf{b}_{i+1} в виде

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (*)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ – некоторые скаляры, которые нужно найти.

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (\star)$$

на \mathbf{b}_1 справа.

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (\star)$$

на \mathbf{b}_1 справа. Раз вектор \mathbf{b}_1 ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1.$$

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (\star)$$

на \mathbf{b}_1 справа. Раз вектор \mathbf{b}_1 ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1.$$

Поскольку вектора \mathbf{b}_{i+1} и \mathbf{b}_1 должны быть ортогональны, левая часть равна 0, и из равенства $0 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1$ заключаем, что

$$\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (\star)$$

на \mathbf{b}_1 справа. Раз вектор \mathbf{b}_1 ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1.$$

Поскольку вектора \mathbf{b}_{i+1} и \mathbf{b}_1 должны быть ортогональны, левая часть равна 0, и из равенства $0 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1$ заключаем, что $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}$. Аналогично, умножая скалярно обе части равенства (\star) на $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ справа и учитывая, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ попарно ортогональны, можно найти $\alpha_2 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}, \dots, \alpha_i = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i}$.

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (\star)$$

на \mathbf{b}_1 справа. Раз вектор \mathbf{b}_1 ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1.$$

Поскольку вектора \mathbf{b}_{i+1} и \mathbf{b}_1 должны быть ортогональны, левая часть равна 0, и из равенства $0 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1$ заключаем, что $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}$. Аналогично, умножая скалярно обе части равенства (\star) на $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ справа и учитывая, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ попарно ортогональны, можно найти $\alpha_2 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}, \dots, \alpha_i = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i}$. При таких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ вектор \mathbf{b}_{i+1} , определяемый равенством (\star) , ортогонален всем векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, откуда система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ ортогональна.

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (*)$$

на \mathbf{b}_1 справа. Раз вектор \mathbf{b}_1 ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1.$$

Поскольку вектора \mathbf{b}_{i+1} и \mathbf{b}_1 должны быть ортогональны, левая часть равна 0, и из равенства $0 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1$ заключаем, что $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}$. Аналогично, умножая скалярно обе части равенства (*) на $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ справа и учитывая, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ попарно ортогональны, можно найти $\alpha_2 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}, \dots, \alpha_i = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i}$. При таких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ вектор \mathbf{b}_{i+1} , определяемый равенством (*), ортогонален всем векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, откуда система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ ортогональна. Напомним, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$. Поэтому равенство (*) дает равенство вида $\mathbf{b}_{i+1} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + t_i \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}$, где t_1, t_2, \dots, t_i – некоторые скаляры.

Чтобы найти α_1 , умножим скалярно обе части равенства

$$\mathbf{b}_{i+1} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_i \mathbf{b}_i + \mathbf{a}_{i+1}, \quad (*)$$

на \mathbf{b}_1 справа. Раз вектор \mathbf{b}_1 ортогонален векторам $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, получаем

$$\mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1.$$

Поскольку вектора \mathbf{b}_{i+1} и \mathbf{b}_1 должны быть ортогональны, левая часть равна 0, и из равенства $0 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1$ заключаем, что $\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}$. Аналогично, умножая скалярно обе части равенства (*) на $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ справа и учитывая, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ попарно ортогональны, можно найти $\alpha_2 = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}, \dots, \alpha_i = -\frac{\mathbf{a}_{i+1} \mathbf{b}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i}$. При таких значениях $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ вектор \mathbf{b}_{i+1} , определяемый равенством (*), ортогонален всем векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, откуда система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$ ортогональна. Напомним, что вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$. Поэтому равенство (*) дает равенство вида $\mathbf{b}_{i+1} = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 + \dots + t_i \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_{i+1}$, где t_1, t_2, \dots, t_i – некоторые скаляры. Иными словами, вектор \mathbf{b}_{i+1} равен некоторой нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$. Поскольку эти вектора линейно независимы, никакая их нетривиальная линейная комбинация не может быть нулевым вектором. Отсюда $\mathbf{b}_{i+1} \neq \mathbf{0}$.

Мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$, который лежит в линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$.

Мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$, который лежит в линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$. С другой стороны, по предположению индукции вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$ принадлежат линейной оболочке векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, а вектор \mathbf{a}_{i+1} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ в силу равенства (\star).

Мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$, который лежит в линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$. С другой стороны, по предположению индукции векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$ принадлежат линейной оболочке векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, а вектор \mathbf{a}_{i+1} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ в силу равенства (*). Поэтому линейные оболочки систем $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$ совпадают. □

Мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$, который лежит в линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$. С другой стороны, по предположению индукции векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$ принадлежат линейной оболочке векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, а вектор \mathbf{a}_{i+1} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ в силу равенства (*). Поэтому линейные оболочки систем $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$ совпадают. □

Следствие об ортонормированном базисе

В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.

Мы получили ортогональный набор ненулевых векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$, который лежит в линейной оболочке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$. С другой стороны, по предположению индукции вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i$ принадлежат линейной оболочке векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_i$, а вектор \mathbf{a}_{i+1} является линейной комбинацией векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ в силу равенства (*). Поэтому линейные оболочки систем $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i+1}$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i+1}$ совпадают. □

Следствие об ортонормированном базисе

В любом конечномерном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть V – рассматриваемое пространство и $\dim V = n$. Возьмем произвольный базис в V и применим к нему процесс Грама–Шмидта. Получим ортогональную систему из n векторов, порождающую V , а следовательно, – ортогональный базис в V . В силу замечания об орте вектора, разделив каждый вектор этого базиса на его длину, получим ортонормированный базис пространства V . □

Следствие о дополнении до ортогонального базиса

Любую ортогональную систему ненулевых векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Следствие о дополнении до ортогонального базиса

Любую ортогональную систему ненулевых векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть V – рассматриваемое пространство, $\dim V = n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – ортогональный набор ненулевых векторов из V . Тогда вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, и их можно дополнить какими-то векторами $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ до базиса V .

Следствие о дополнении до ортогонального базиса

Любую ортогональную систему ненулевых векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть V – рассматриваемое пространство, $\dim V = n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – ортогональный набор ненулевых векторов из V . Тогда вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, и их можно дополнить какими-то векторами $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ до базиса V . Применив к базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ процесс Грама–Шмидта, получим ортогональный базис в V . Легко убедиться, что на первых k шагах процесс будет возвращать именно вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. \square

Следствие о дополнении до ортогонального базиса

Любую ортогональную систему ненулевых векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортогонального базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть V – рассматриваемое пространство, $\dim V = n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – ортогональный набор ненулевых векторов из V . Тогда вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, и их можно дополнить какими-то векторами $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ до базиса V . Применив к базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ процесс Грама–Шмидта, получим ортогональный базис в V . Легко убедиться, что на первых k шагах процесс будет возвращать именно вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. \square

Отсюда сразу получается и такой факт:

Следствие о дополнении до ортонормированного базиса

Любую ортонормированную систему векторов конечномерного пространства со скалярным произведением можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.

Процесс Грама–Шмидта можно применять и к *бесконечным системам* линейно независимых векторов.

Процесс Грама–Шмидта можно применять и к *бесконечным системам* линейно независимых векторов. Например, если рассматривать кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как евклидово пространство относительно скалярного произведения $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$, то применив процесс Грама–Шмидта к линейно независимой системе $1, x, \dots, x^n, \dots$, получим ортогональную систему так называемых *сдвинутых многочленов Лежандра* $\{\tilde{P}_n(x)\}$.

Процесс Грама–Шмидта можно применять и к *бесконечным системам* линейно независимых векторов. Например, если рассматривать кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как евклидово пространство относительно скалярного произведения $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$, то применив процесс Грама–Шмидта к линейно независимой системе $1, x, \dots, x^n, \dots$, получим ортогональную систему так называемых *сдвинутых многочленов Лежандра* $\{\tilde{P}_n(x)\}$. Вот несколько первых многочленов этой системы:

n	$\tilde{P}_n(x)$
0	1
1	$2x - 1$
2	$6x^2 - 6x + 1$
3	$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$
4	$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1$
5	$252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1$

Процесс Грама–Шмидта можно применять и к *бесконечным системам* линейно независимых векторов. Например, если рассматривать кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как евклидово пространство относительно скалярного произведения $(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$, то применив процесс Грама–Шмидта к линейно независимой системе $1, x, \dots, x^n, \dots$, получим ортогональную систему так называемых *сдвинутых многочленов Лежандра* $\{\tilde{P}_n(x)\}$. Вот несколько первых многочленов этой системы:

n	$\tilde{P}_n(x)$
0	1
1	$2x - 1$
2	$6x^2 - 6x + 1$
3	$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$
4	$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1$
5	$252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1$

Многочлены $\{\tilde{P}_n(x)\}$ имеют многочисленные приложения в математике; в последнее время они используются при построении нейронных сетей.

Определение

Пусть S – подпространство в V . Множество всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется *ортогональным дополнением* подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства S обозначается через S^\perp .

Определение

Пусть S – подпространство в V . Множество всех векторов, ортогональных к произвольному вектору из S , называется **ортогональным дополнением** подпространства S . Ортогональное дополнение подпространства S обозначается через S^\perp .

Предложение об ортогональном дополнении

Пусть S – подпространство пространства со скалярным произведением V , а S^\perp – ортогональное дополнение S . Тогда:

- 1) S^\perp – подпространство пространства V ;
- 2) если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – базис S , то $\mathbf{x} \in S^\perp$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}\mathbf{a}_1 = \mathbf{x}\mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{x}\mathbf{a}_k = 0$.

Доказательство. 1) Если $x, y \in S^\perp$, $a \in S$, а $t \in F$ – произвольное число, то $(x + y)a = xa + ya = 0 + 0 = 0$ и $(tx)a = t(xa) = t \cdot 0 = 0$.

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^\perp$, $\mathbf{a} \in S$, а $t \in F$ – произвольное число, то $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{a} = \mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{y}\mathbf{a} = 0 + 0 = 0$ и $(t\mathbf{x})\mathbf{a} = t(\mathbf{x}\mathbf{a}) = t \cdot 0 = 0$.

2) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – базис S , а $\mathbf{x} \in S^\perp$, то вектор \mathbf{x} ортогонален векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, поскольку он ортогонален всем векторам из S . Предположим теперь, что \mathbf{x} ортогонален векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{a} \in S$. Тогда $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Тогда

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{x} = t_1(\mathbf{a}_1\mathbf{x}) + t_2(\mathbf{a}_2\mathbf{x}) + \dots + t_k(\mathbf{a}_k\mathbf{x})$$

Доказательство. 1) Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^\perp$, $\mathbf{a} \in S$, а $t \in F$ – произвольное число, то $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{a} = \mathbf{x}\mathbf{a} + \mathbf{y}\mathbf{a} = 0 + 0 = 0$ и $(t\mathbf{x})\mathbf{a} = t(\mathbf{x}\mathbf{a}) = t \cdot 0 = 0$.

2) Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – базис S , а $\mathbf{x} \in S^\perp$, то вектор \mathbf{x} ортогонален векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, поскольку он ортогонален всем векторам из S . Предположим теперь, что \mathbf{x} ортогонален векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{a} \in S$. Тогда $\mathbf{a} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \dots, t_k \in F$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{x} &= (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k)\mathbf{x} = t_1(\mathbf{a}_1\mathbf{x}) + t_2(\mathbf{a}_2\mathbf{x}) + \dots + t_k(\mathbf{a}_k\mathbf{x}) = \\ &= t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0 + \dots + t_k \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

и потому $\mathbf{x} \in S^\perp$. □

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V , то $V = S \oplus S^\perp$.

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V , то $V = S \oplus S^\perp$.

Доказательство. Если $x \in S \cap S^\perp$, то $xx = 0$, откуда $x = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$, откуда сумма $S + S^\perp$ прямая.

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V , то $V = S \oplus S^\perp$.

Доказательство. Если $x \in S \cap S^\perp$, то $xx = 0$, откуда $x = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$, откуда сумма $S + S^\perp$ прямая. Осталось проверить, что $S + S^\perp = V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Возьмем ортонормированный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ подпространства S и дополним этот базис до ортонормированного базиса пространства V .

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V , то $V = S \oplus S^\perp$.

Доказательство. Если $x \in S \cap S^\perp$, то $xx = 0$, откуда $x = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$, откуда сумма $S + S^\perp$ прямая. Осталось проверить, что $S + S^\perp = V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Возьмем ортонормированный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ подпространства S и дополним этот базис до ортонормированного базиса пространства V . Пусть $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ – вектора, использованные для дополнения. Каждый из этих $n - k$ векторов ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, и предложение об ортогональном дополнении дает $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n \in S^\perp$.

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V , то $V = S \oplus S^\perp$.

Доказательство. Если $x \in S \cap S^\perp$, то $xx = 0$, откуда $x = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$, откуда сумма $S + S^\perp$ прямая. Осталось проверить, что $S + S^\perp = V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Возьмем ортонормированный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ подпространства S и дополним этот базис до ортонормированного базиса пространства V . Пусть $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ – вектора, использованные для дополнения. Каждый из этих $n - k$ векторов ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, и предложение об ортогональном дополнении дает $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n \in S^\perp$. Итак, $S + S^\perp$ содержит все вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, составляющие базис V , откуда $S + S^\perp = V$. □

Теорема об ортогональном разложении

Если V – пространство со скалярным произведением, а S – подпространство в V , то $V = S \oplus S^\perp$.

Доказательство. Если $x \in S \cap S^\perp$, то $xx = 0$, откуда $x = \mathbf{0}$. Таким образом, $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$, откуда сумма $S + S^\perp$ прямая. Осталось проверить, что $S + S^\perp = V$. Положим $\dim V = n$ и $\dim S = k$. Возьмем ортонормированный базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ подпространства S и дополним этот базис до ортонормированного базиса пространства V . Пусть $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ – вектора, использованные для дополнения. Каждый из этих $n - k$ векторов ортогонален всем векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, и предложение об ортогональном дополнении дает $\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n \in S^\perp$. Итак, $S + S^\perp$ содержит все вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, составляющие базис V , откуда $S + S^\perp = V$. □

Равенство $V = S \oplus S^\perp$ называется *ортогональным разложением* пространства V относительно подпространства S .

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства.

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

- 1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$;
- 2) $(S^\perp)^\perp = S$

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

- 1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$;
- 2) $(S^\perp)^\perp = S$;
- 3) если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

- 1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$;
- 2) $(S^\perp)^\perp = S$;
- 3) если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
- 4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, а $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

- 1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$;
- 2) $(S^\perp)^\perp = S$;
- 3) если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
- 4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, а $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$;
- 5) если $V = S_1 \oplus S_2$, то $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$.

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

- 1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$;
- 2) $(S^\perp)^\perp = S$;
- 3) если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
- 4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, а $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$;
- 5) если $V = S_1 \oplus S_2$, то $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$.

Доказательство. 1) Если $x \in V^\perp$, то $xu = 0$ для любого вектора $u \in V$. В частности, $xx = 0$. В силу аксиомы 4) имеем $x = 0$. Следовательно, $V^\perp = \{0\}$. А равенство $\{0\}^\perp = V$ вытекает из замечания о нулевом векторе и ортогональности.

Свойства ортогонального дополнения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, а S , S_1 и S_2 – его подпространства. Тогда:

- 1) $V^\perp = \{0\}$, а $\{0\}^\perp = V$;
- 2) $(S^\perp)^\perp = S$;
- 3) если $S_1 \subseteq S_2$, то $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$;
- 4) $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$, а $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp$;
- 5) если $V = S_1 \oplus S_2$, то $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$.

Доказательство. 1) Если $x \in V^\perp$, то $xu = 0$ для любого вектора $u \in V$. В частности, $xx = 0$. В силу аксиомы 4) имеем $x = 0$. Следовательно, $V^\perp = \{0\}$. А равенство $\{0\}^\perp = V$ вытекает из замечания о нулевом векторе и ортогональности.

2) Из определения ортогонального дополнения вытекает, что если $x \in S$, то x ортогонален к любому вектору из S^\perp . Следовательно, $S \subseteq (S^\perp)^\perp$. Пусть $\dim S = k$ и $\dim V = n$. В силу теоремы об ортогональном разложении $\dim(S^\perp)^\perp = n - \dim S^\perp = n - (n - k) = k = \dim S$. Итак, S – подпространство в $(S^\perp)^\perp$ и $\dim S = \dim(S^\perp)^\perp$. Отсюда $S = (S^\perp)^\perp$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $x \in S_2^\perp$. Тогда x ортогонален к любому вектору из S_2 , а значит, в частности, и к любому вектору из S_1 . Следовательно, $x \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $x \in S_2^\perp$. Тогда x ортогонален к любому вектору из S_2 , а значит, в частности, и к любому вектору из S_1 . Следовательно, $x \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

4) Пусть $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$ и $y \in S_1 + S_2$. Тогда $y = y_1 + y_2$ для некоторых векторов $y_1 \in S_1$ и $y_2 \in S_2$. В силу выбора x имеем $xy_1 = xy_2 = 0$, откуда

$$xy = x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $x \in (S_1 + S_2)^\perp$, и потому $S_1^\perp \cap S_2^\perp \subseteq (S_1 + S_2)^\perp$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $x \in S_2^\perp$. Тогда x ортогонален к любому вектору из S_2 , а значит, в частности, и к любому вектору из S_1 . Следовательно, $x \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

4) Пусть $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$ и $y \in S_1 + S_2$. Тогда $y = y_1 + y_2$ для некоторых векторов $y_1 \in S_1$ и $y_2 \in S_2$. В силу выбора x имеем $xy_1 = xy_2 = 0$, откуда

$$xy = x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $x \in (S_1 + S_2)^\perp$, и потому $S_1^\perp \cap S_2^\perp \subseteq (S_1 + S_2)^\perp$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in (S_1 + S_2)^\perp$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3) вытекает, что $x \in S_1^\perp$ и $x \in S_2^\perp$. Следовательно, $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$, и потому $(S_1 + S_2)^\perp \subseteq S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Мы проверили, что $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$.

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $x \in S_2^\perp$. Тогда x ортогонален к любому вектору из S_2 , а значит, в частности, и к любому вектору из S_1 . Следовательно, $x \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

4) Пусть $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$ и $y \in S_1 + S_2$. Тогда $y = y_1 + y_2$ для некоторых векторов $y_1 \in S_1$ и $y_2 \in S_2$. В силу выбора x имеем $xy_1 = xy_2 = 0$, откуда

$$xy = x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $x \in (S_1 + S_2)^\perp$, и потому $S_1^\perp \cap S_2^\perp \subseteq (S_1 + S_2)^\perp$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in (S_1 + S_2)^\perp$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3) вытекает, что $x \in S_1^\perp$ и $x \in S_2^\perp$. Следовательно, $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$, и потому $(S_1 + S_2)^\perp \subseteq S_1^\perp \cap S_2^\perp$.

Мы проверили, что $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Используя свойство 2), имеем

$$S_1^\perp + S_2^\perp = ((S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp)^\perp = ((S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp)^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp.$$

3) Пусть $S_1 \subseteq S_2$ и $x \in S_2^\perp$. Тогда x ортогонален к любому вектору из S_2 , а значит, в частности, и к любому вектору из S_1 . Следовательно, $x \in S_1^\perp$, и потому $S_2^\perp \subseteq S_1^\perp$.

4) Пусть $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$ и $y \in S_1 + S_2$. Тогда $y = y_1 + y_2$ для некоторых векторов $y_1 \in S_1$ и $y_2 \in S_2$. В силу выбора x имеем $xy_1 = xy_2 = 0$, откуда

$$xy = x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, $x \in (S_1 + S_2)^\perp$, и потому $S_1^\perp \cap S_2^\perp \subseteq (S_1 + S_2)^\perp$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in (S_1 + S_2)^\perp$. Поскольку $S_1 \subseteq S_1 + S_2$ и $S_2 \subseteq S_1 + S_2$, из свойства 3) вытекает, что $x \in S_1^\perp$ и $x \in S_2^\perp$. Следовательно, $x \in S_1^\perp \cap S_2^\perp$, и потому $(S_1 + S_2)^\perp \subseteq S_1^\perp \cap S_2^\perp$.

Мы проверили, что $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$. Используя свойство 2), имеем

$$S_1^\perp + S_2^\perp = ((S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp)^\perp = ((S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp)^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp.$$

5) По условию $S_1 \cap S_2 = \{0\}$. Используя свойства 1) и 4), имеем $S_1^\perp + S_2^\perp = (S_1 \cap S_2)^\perp = \{0\}^\perp = V$. Далее, $S_1 + S_2 = V$, откуда, снова используя 1) и 4), получаем $S_1^\perp \cap S_2^\perp = (S_1 + S_2)^\perp = V^\perp = \{0\}$. Итак, $V = S_1^\perp \oplus S_2^\perp$. □

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств.

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 – подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp = (S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp.$$

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 – подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp = (S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp.$$

Поскольку мы знаем, как находить базисы суммы подпространств и ортогонального дополнения к подпространству, это позволяет легко найти базис пересечения подпространств.

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 – подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp = (S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp.$$

Поскольку мы знаем, как находить базисы суммы подпространств и ортогонального дополнения к подпространству, это позволяет легко найти базис пересечения подпространств.

В лекции 3 темы IV, когда обсуждалось построение базиса суммы, было сказано: «Базис пересечения ищется несколько сложнее. Способ решения этой задачи будет указан в следующем разделе.»

Свойства ортогонального дополнения позволяют найти базис пересечения подпространств. В самом деле, если S_1 и S_2 – подпространства пространства со скалярным произведением, то

$$S_1 \cap S_2 = (S_1^\perp)^\perp \cap (S_2^\perp)^\perp = (S_1^\perp + S_2^\perp)^\perp.$$

Поскольку мы знаем, как находить базисы суммы подпространств и ортогонального дополнения к подпространству, это позволяет легко найти базис пересечения подпространств.

В лекции 3 темы IV, когда обсуждалось построение базиса суммы, было сказано: «Базис пересечения ищется несколько сложнее. Способ решения этой задачи будет указан в следующем разделе.» Сейчас мы – с некоторым опозданием – выполнили это обещание.

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$.

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора y и z такие, что $y \in S$, $z \in S^\perp$ и $x = y + z$. Вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство S и обозначается через x_S , а вектор z называется *ортогональной составляющей* x относительно S и обозначается через x^\perp .

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора y и z такие, что $y \in S$, $z \in S^\perp$ и $x = y + z$. Вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство S и обозначается через x_S , а вектор z называется *ортогональной составляющей* x относительно S и обозначается через x^\perp . Длина ортогональной составляющей вектора x относительно S называется *расстоянием от x до S* .

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора y и z такие, что $y \in S$, $z \in S^\perp$ и $x = y + z$. Вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство S и обозначается через x_S , а вектор z называется *ортогональной составляющей* x относительно S и обозначается через x^\perp . Длина ортогональной составляющей вектора x относительно S называется *расстоянием от x до S* . Предположим теперь, что V – евклидово пространство. Если $S \neq \{0\}$ и $y \neq 0$, то *углом между x и S* называется угол между векторами x и y .

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора y и z такие, что $y \in S$, $z \in S^\perp$ и $x = y + z$. Вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство S и обозначается через x_S , а вектор z называется *ортогональной составляющей* x относительно S и обозначается через x^\perp . Длина ортогональной составляющей вектора x относительно S называется *расстоянием от x до S* . Предположим теперь, что V – евклидово пространство. Если $S \neq \{0\}$ и $y \neq 0$, то *углом между x и S* называется угол между векторами x и y . Если $S \neq \{0\}$ и $y = 0$, то угол между x и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $x = z \in S^\perp$). Наконец, если $S = \{0\}$, то угол между x и S не определен.

Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора y и z такие, что $y \in S$, $z \in S^\perp$ и $x = y + z$. Вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство S и обозначается через x_S , а вектор z называется *ортогональной составляющей* x относительно S и обозначается через x^\perp . Длина ортогональной составляющей вектора x относительно S называется *расстоянием от x до S* . Предположим теперь, что V – евклидово пространство. Если $S \neq \{0\}$ и $y \neq 0$, то *углом между x и S* называется угол между векторами x и y . Если $S \neq \{0\}$ и $y = 0$, то угол между x и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $x = z \in S^\perp$). Наконец, если $S = \{0\}$, то угол между x и S не определен. Расстояние от x до S обозначается через $d(x, S)$, а угол между x и S – через $\widehat{(x, S)}$.

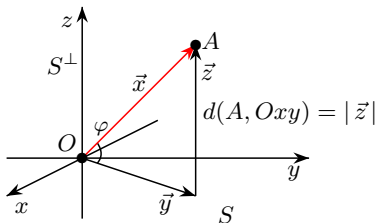
Определения

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство и $x \in V$. В силу теоремы об ортогональном разложении существуют, и притом единственные, вектора y и z такие, что $y \in S$, $z \in S^\perp$ и $x = y + z$. Вектор y называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство S и обозначается через x_S , а вектор z называется *ортогональной составляющей* x относительно S и обозначается через x^\perp . Длина ортогональной составляющей вектора x относительно S называется *расстоянием от x до S* . Предположим теперь, что V – евклидово пространство. Если $S \neq \{0\}$ и $y \neq 0$, то *углом между x и S* называется угол между векторами x и y . Если $S \neq \{0\}$ и $y = 0$, то угол между x и S по определению считается равным $\frac{\pi}{2}$ (это естественно, так как в данном случае $x = z \in S^\perp$). Наконец, если $S = \{0\}$, то угол между x и S не определен. Расстояние от x до S обозначается через $d(x, S)$, а угол между x и S – через (x, S) .

- В унитарном пространстве угол между вектором и подпространством не определен, поскольку в нем не определен угол между векторами.

Все введенные только что понятия полностью аналогичны одноименным понятиям в обычном пространстве с обычным скалярным произведением.

Все введенные только что понятия полностью аналогичны одноименным понятиям в обычном пространстве с обычным скалярным произведением. В самом деле, возьмем в этом пространстве в качестве подпространства S плоскость Oxy . Ясно, что ортогональным дополнением S^\perp будет ось Oz . Отложим вектор \vec{x} от начала координат. Тогда ортогональная проекция вектора \vec{x} на S – это его проекция на плоскость Oxy в обычном смысле, расстояние от \vec{x} до S – обычное расстояние от конца вектора \vec{x} до плоскости Oxy , угол между \vec{x} и S – обычный угол между этим вектором и Oxy (см. рисунок).



Расстояние от вектора до подпространства
и угол между вектором и подпространством

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство, а \mathbf{a} – произвольный вектор из V . Обозначим через \mathbf{a}_S ортогональную проекцию \mathbf{a} на S , а через \mathbf{a}^\perp – ортогональную составляющую \mathbf{a} относительно S . Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ расстояние между \mathbf{a} и \mathbf{x} , рассматриваемое как функцию от \mathbf{x} .

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство, а \mathbf{a} – произвольный вектор из V . Обозначим через \mathbf{a}_S ортогональную проекцию \mathbf{a} на S , а через \mathbf{a}^\perp – ортогональную составляющую \mathbf{a} относительно S . Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ расстояние между \mathbf{a} и \mathbf{x} , рассматриваемое как функцию от \mathbf{x} .

Замечание об ортогональной проекции

Значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. При этом $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = d(\mathbf{a}, S)$.

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство, а \mathbf{a} – произвольный вектор из V . Обозначим через \mathbf{a}_S ортогональную проекцию \mathbf{a} на S , а через \mathbf{a}^\perp – ортогональную составляющую \mathbf{a} относительно S . Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ расстояние между \mathbf{a} и \mathbf{x} , рассматриваемое как функцию от \mathbf{x} .

Замечание об ортогональной проекции

Значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. При этом $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = d(\mathbf{a}, S)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} \in S$, из теоремы Пифагора вытекает, что $|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{a}_S + \mathbf{a}^\perp) - \mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{a}_S - \mathbf{x}) + \mathbf{a}^\perp|^2 = |\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{a}^\perp|^2$.

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство, а \mathbf{a} – произвольный вектор из V . Обозначим через \mathbf{a}_S ортогональную проекцию \mathbf{a} на S , а через \mathbf{a}^\perp – ортогональную составляющую \mathbf{a} относительно S . Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ расстояние между \mathbf{a} и \mathbf{x} , рассматриваемое как функцию от \mathbf{x} .

Замечание об ортогональной проекции

Значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. При этом $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = d(\mathbf{a}, S)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} \in S$, из теоремы Пифагора вытекает, что $|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{a}_S + \mathbf{a}^\perp) - \mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{a}_S - \mathbf{x}) + \mathbf{a}^\perp|^2 = |\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{a}^\perp|^2$. Поскольку $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = |\mathbf{a} - \mathbf{x}|$, мы получаем, что значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда минимально значение выражения $|\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2$. В свою очередь, значение последнего выражения минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. Первое утверждение доказано.

Связь ортогональной проекции вектора на подпространство с расстоянием от вектора до подпространства

Пусть V – пространство со скалярным произведением, S – его подпространство, а \mathbf{a} – произвольный вектор из V . Обозначим через \mathbf{a}_S ортогональную проекцию \mathbf{a} на S , а через \mathbf{a}^\perp – ортогональную составляющую \mathbf{a} относительно S . Для всякого $\mathbf{x} \in S$ обозначим через $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ расстояние между \mathbf{a} и \mathbf{x} , рассматриваемое как функцию от \mathbf{x} .

Замечание об ортогональной проекции

Значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. При этом $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = d(\mathbf{a}, S)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} \in S$, из теоремы Пифагора вытекает, что $|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{a}_S + \mathbf{a}^\perp) - \mathbf{x}|^2 = |(\mathbf{a}_S - \mathbf{x}) + \mathbf{a}^\perp|^2 = |\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2 + |\mathbf{a}^\perp|^2$. Поскольку $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = |\mathbf{a} - \mathbf{x}|$, мы получаем, что значение функции $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ минимально тогда и только тогда, когда минимально значение выражения $|\mathbf{a}_S - \mathbf{x}|^2$. В свою очередь, значение последнего выражения минимально тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}_S - \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. когда $\mathbf{x} = \mathbf{a}_S$. Первое утверждение доказано.

Из доказанного вытекает, что $d_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_S) = |\mathbf{a}^\perp|$, а $|\mathbf{a}^\perp| = d(\mathbf{a}, S)$ по определению расстояния от вектора до подпространства. □

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого $i = 2, 3, \dots, k$ вектор \mathbf{b}_i является ортогональной составляющей вектора \mathbf{a}_i относительно подпространства S , порожденного $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого $i = 2, 3, \dots, k$ вектор \mathbf{b}_i является ортогональной составляющей вектора \mathbf{a}_i относительно подпространства S , порожденного $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Доказательство. Процесс Грама–Шмидта обеспечивает, что:

- (i) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ – ортогональный базис в S

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого $i = 2, 3, \dots, k$ вектор \mathbf{b}_i является ортогональной составляющей вектора \mathbf{a}_i относительно подпространства S , порожденного $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Доказательство. Процесс Грама–Шмидта обеспечивает, что:

- (i) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ – ортогональный базис в S ,
- (ii) вектор \mathbf{b}_i ортогонален векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого $i = 2, 3, \dots, k$ вектор \mathbf{b}_i является ортогональной составляющей вектора \mathbf{a}_i относительно подпространства S , порожденного $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Доказательство. Процесс Грама–Шмидта обеспечивает, что:

- (i) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ – ортогональный базис в S ,
- (ii) вектор \mathbf{b}_i ортогонален векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$,
- (iii) $\mathbf{b}_i = \mathbf{x} + \mathbf{a}_i$ для некоторого вектора $\mathbf{x} \in S$.

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого $i = 2, 3, \dots, k$ вектор \mathbf{b}_i является ортогональной составляющей вектора \mathbf{a}_i относительно подпространства S , порожденного $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Доказательство. Процесс Грама–Шмидта обеспечивает, что:

- (i) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ – ортогональный базис в S ,
- (ii) вектор \mathbf{b}_i ортогонален векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$,
- (iii) $\mathbf{b}_i = \mathbf{x} + \mathbf{a}_i$ для некоторого вектора $\mathbf{x} \in S$.

Из (i) и (ii) вытекает, что $\mathbf{b}_i \in S^\perp$.

Замечание об ортогональной составляющей и процессе ортогонализации

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – линейно независимая система векторов в пространстве со скалярным произведением, а система $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ получена из нее процессом Грама–Шмидта. Тогда для всякого $i = 2, 3, \dots, k$ вектор \mathbf{b}_i является ортогональной составляющей вектора \mathbf{a}_i относительно подпространства S , порожденного $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}$.

Доказательство. Процесс Грама–Шмидта обеспечивает, что:

- (i) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}\}$ – ортогональный базис в S ,
- (ii) вектор \mathbf{b}_i ортогонален векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{i-1}$,
- (iii) $\mathbf{b}_i = \mathbf{x} + \mathbf{a}_i$ для некоторого вектора $\mathbf{x} \in S$.

Из (i) и (ii) вытекает, что $\mathbf{b}_i \in S^\perp$. Из (iii) имеем $\mathbf{a}_i = -\mathbf{x} + \mathbf{b}_i$, причем $-\mathbf{x} \in S$ и $\mathbf{b}_i \in S^\perp$. Следовательно, \mathbf{b}_i – ортогональная составляющая вектора \mathbf{a}_i относительно S . □

Напомним, что *псевдорешение* системы линейных уравнений $Ax = b$ – это такой вектор x_0 , что расстояние между векторами Ax_0 и b наименьшее.

Напомним, что *псевдорешение* системы линейных уравнений $Ax = \mathbf{b}$ – это такой вектор \mathbf{x}_0 , что расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и \mathbf{b} наименьшее.

Теперь понятно, как можно искать псевдорешения. Нужно:

(1) найти ортогональную проекцию \mathbf{b}_S вектора \mathbf{b} на образ S линейного отображения $x \mapsto Ax$ (т.е. на подпространство, порожденное столбцами матрицы A)

Напомним, что *псевдорешение* системы линейных уравнений $Ax = b$ – это такой вектор x_0 , что расстояние между векторами Ax_0 и b наименьшее.

Теперь понятно, как можно искать псевдорешения. Нужно:

- (1) найти ортогональную проекцию b_S вектора b на образ S линейного отображения $x \mapsto Ax$ (т.е. на подпространство, порожденное столбцами матрицы A), а затем
- (2) решить систему $Ax = b_S$, которая заведомо совместна.

Напомним, что *псевдорешение* системы линейных уравнений $Ax = \mathbf{b}$ – это такой вектор \mathbf{x}_0 , что расстояние между векторами $A\mathbf{x}_0$ и \mathbf{b} наименьшее.

Теперь понятно, как можно искать псевдорешения. Нужно:

- (1) найти ортогональную проекцию \mathbf{b}_S вектора \mathbf{b} на образ S линейного отображения $x \mapsto Ax$ (т.е. на подпространство, порожденное столбцами матрицы A), а затем
- (2) решить систему $Ax = \mathbf{b}_S$, которая заведомо совместна.

Любое решение системы $Ax = \mathbf{b}_S$ действительно является псевдорешением исходной системы $Ax = \mathbf{b}$, так как наименьшее расстояние от вектора \mathbf{b} до подпространства S есть расстояние от \mathbf{b} до \mathbf{b}_S .