# Тема VI: Евклидовы и унитарные пространства

# § 3. Метод наименьших квадратов

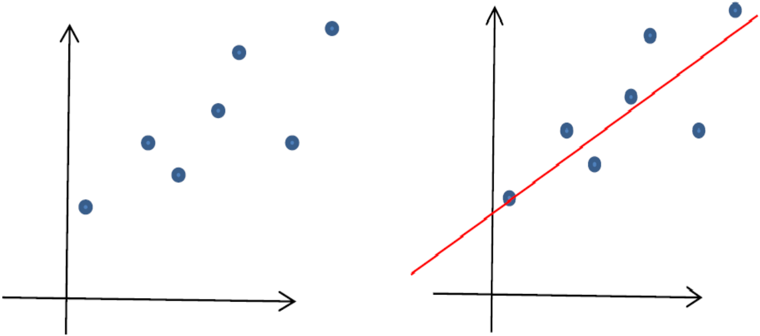
Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Обсудим решение несовместных систем линейных уравнений подробнее.

Типичный источник таких систем — обработка экспериментальных данных.



Число неизвестных мало (в данном примере ищется прямая $y = ax + b$, и неизвестные — это коэффициенты $a$ и $b$), а число уравнений велико (в данном примере каждая точка $(x_i, y_i)$ задает уравнение $y_i = ax_i + b$).

# Псевдорешения

*Псевдорешение* системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ — это вектор $\mathbf{x}_0$, минимизирующий расстояние между векторами $A\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$.

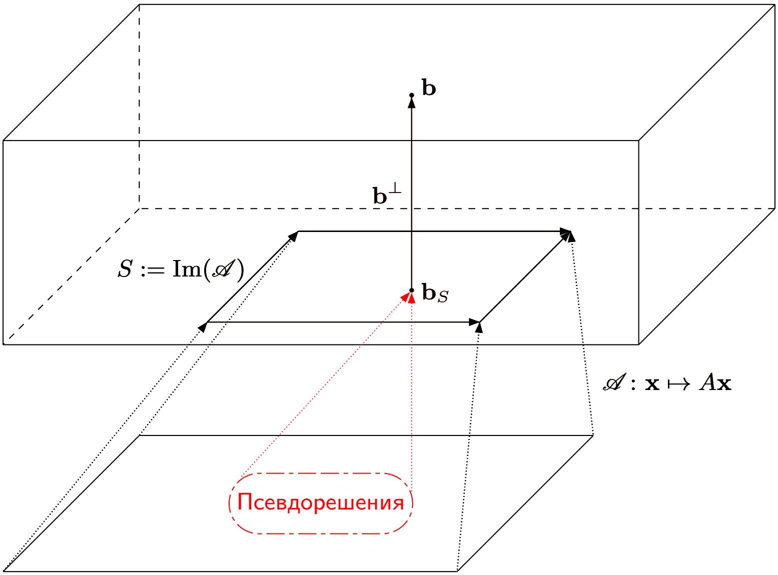
В конце прошлой лекции был намечен такой план поиска псевдорешений:

- найти ортогональную проекцию $\mathbf{b}_S$ вектора $\mathbf{b}$ на образ $S$ линейного отображения $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (т.е. на подпространство, порожденное столбцами матрицы $A$);
- решить совместную систему $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$.

Было показано, что любое решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$ действительно является псевдорешением исходной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, так как наименьшее расстояние от вектора $\mathbf{b}$ до подпространства $S$ есть расстояние от $\mathbf{b}$ до $\mathbf{b}_S$.

В реальных задачах ранг матрицы $A$ равен числу неизвестных. (Например, в задаче проведения прямой $y = ax + b$ через набор точек $\{(x_i, y_i)\}$ ранг равен 1 только, если все эти точки лежат на одной вертикальной прямой.) При таком условии система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$ имеет единственное решение, а значит, имеется *единственное* псевдорешение исходной системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Если псевдорешение неединственно, то обычно интересуются псевдорешением наименьшей длины (*нормальное* псевдорешение). К вопросу о нормальных псевдорешениях мы вернемся позже.


$\mathbf{b}$
$\mathbf{b}^{\perp}$
$S := \mathrm{Im}(\mathscr{A})$
$\mathbf{b}_S$
$\mathscr{A} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$
Псевдорешения

Концептуально подход, описанный и проиллюстрированный выше, прост. Однако вычисление ортогональной проекции с помощью процесса Грама–Шмидта приводит к громоздким и *неустойчивым* вычислениям.

Опишем простое соображение, которое позволяет находить псевдорешения без вычисления ортогональной проекции. Его называют *методом наименьших квадратов*, поскольку речь идет о минимизации длины вектора $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, т.е. минимизации скалярного квадрата этого вектора.

Для определенности ограничимся случаем евклидова пространства; именно этот случай важен для практики.

**Теорема (обоснование метода наименьших квадратов)**

*Пусть $A$ — $k \times n$-матрица над $\mathbb{R}$, а $S$ — образ линейного отображения $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^k$. Для произвольного вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$ и $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ равносильны.*

Таким образом, вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ будет псевдорешением системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ является решением системы $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

*Доказательство.* Подпространство $S$ порождается образами базисных векторов пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. столбцами матрицы $A$. Столбцы матрицы $A$ — это строки матрицы $A^T$. Из ортогонального разложения пространства $\mathbb{R}^k$ относительно подпространства $S$ имеем $\mathbf{b} = \mathbf{b}_S + \mathbf{b}^\perp$. Умножая это равенство слева на матрицу $A^T$ и вспоминая формулу, выражающую скалярное произведение в евклидовом пространстве через координаты в ортонормированном базисе (т.е. формулу $\mathbf{uv} = [\mathbf{u}]^T[\mathbf{v}]$), получаем:

$$A^T\mathbf{b} = A^T(\mathbf{b}_S + \mathbf{b}^\perp) = A^T\mathbf{b}_S + A^T\mathbf{b}^\perp = A^T\mathbf{b}_S, \qquad (\star)$$

поскольку вектор $\mathbf{b}^\perp$ ортогонален всем векторам из $S$.
Из $(\star)$, если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$, то

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}_S \overset{(\star)}{=} A^T\mathbf{b}.$$

Обратно, пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ является решением системы $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и перемножим вектора $A\mathbf{y}$ и $A\mathbf{x} - \mathbf{b}_S$. Имеем (снова используя формулу $\mathbf{uv} = [\mathbf{u}]^T[\mathbf{v}]$)

$$(A\mathbf{y})^T(A\mathbf{x}-\mathbf{b}_S) = \mathbf{y}^TA^T(A\mathbf{x}-\mathbf{b}_S) = \mathbf{y}^T(A^TA\mathbf{x}-A^T\mathbf{b}_S) \overset{(\star)}{=} \mathbf{y}^T(A^TA\mathbf{x}-A^T\mathbf{b}) = 0.$$

Итак, вектор $A\mathbf{x} - \mathbf{b}_S$ ортогонален любому вектору из $S$, в частности, самому себе. Отсюда $A\mathbf{x} - \mathbf{b}_S = \mathbf{0}$ и $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$. □

# Метод наименьших квадратов (3)

Отметим, что если ранг $k \times n$-матрицы $A$ равен $n$, то $n \times n$-матрица $A^T A$ будет обратимой (*упражнение*). В этом случае при любой правой части $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имеет единственное псевдорешение, для которого есть простая формула:

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}.$$

Метод наименьших квадратов изобрел (по его словам — в 1795 г.) и с большим успехом применял Карл Фридрих Гаусс (1777–1855).

# Заключительные замечания

*1*. Метод наименьших квадратов работает и для унитарных пространств, т.е. для систем с комплексными коэффициентами. Единственное отличие состоит в том, что для отыскания псевдорешений системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ надо решать систему $A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}$, где $A^*$ — *эрмитово сопряженная* матрица к матрице $A$. (Эрмитово сопряженная матрица получается, если исходную матрицу транспонировать и заменить каждый элемент его сопряженным: если $A = (a_{ij})_{k\times n}$, то $A^* := (\overline{a_{ji}})_{n\times k}$.)

*2*. Имеются и другие методы нахождения псевдорешений несовместных системы линейных уравнений, например, итерационный *метод Качмажа*.

## Решение упражнения

Утверждалось, что если ранг $k \times n$-матрицы $A$ равен $n$, то $n \times n$-матрица $A^T A$ будет обратимой. На самом деле, справедлив более общий факт:

**Предложение**

*Для любой матрицы $A$ над $\mathbb{R}$ ее ранг равен рангу матрицы $A^T A$.*

*Доказательство.* Выше установлено, что системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_S$ и $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ равносильны для произвольного вектора $\mathbf{b}$. Полагая $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, заключаем, что у однородных систем $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $A^T A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ одно и то же пространство решений; обозначим его через $R$. Применяя к каждой из этих систем теорему о размерности пространства решений линейной однородной системы, получаем, что размерность $R$ равна разности между числом неизвестных и рангом матрицы $A$ и в то же время равна разности между числом неизвестных и рангом матрицы $A^T A$. Следовательно, эти ранги равны. $\square$

**Вопрос**

*Верен ли аналогичный факт для матриц над произвольными полями?*