Тема V: Линейные операторы

§ 4. Применения ранга

Б.М.Верников   М.В.Волков

Уральский федеральный университет

Институт естественных наук и математики

кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица с элементами из некоторого поля F.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица с элементами из некоторого поля F.
Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица с элементами из некоторого поля F.
Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.
Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица с элементами из некоторого поля F.
Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.
Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Мы доказали следующий важный результат:

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Алгоритм вычисления ранга

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга.

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Алгоритм вычисления ранга

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r,r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен 2.

Алгоритм вычисления ранга

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду.

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Алгоритм вычисления ранга

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -0 & 0\end{pmatrix}$$

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -0 & 0 \end{pmatrix}$$

Уже отсюда видно, что ранг равен 2

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.

Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.

Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.

Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.
Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.
Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$. При этом матрица A будет матрицей оператора $\mathcal{A}$ (в стандартном базисе пространства столбцов).

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.
Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$. При этом матрица A будет матрицей оператора $\mathcal{A}$ (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [\mathcal{A}]$ обратима тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{A}$.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.
Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$. При этом матрица A будет матрицей оператора $\mathcal{A}$ (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [\mathcal{A}]$ обратима тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ обратим, его образ совпадает со всем пространством столбцов, а значит, ранг $\mathcal{A}$ равен n.

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.
Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$. При этом матрица A будет матрицей оператора $\mathcal{A}$ (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [\mathcal{A}]$ обратима тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ обратим, его образ совпадает со всем пространством столбцов, а значит, ранг $\mathcal{A}$ равен n. Так как ранг линейного оператора совпадает с рангом его матрицы, заключаем, что ранг A равен n.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Тем самым, $\mathcal{A}$ – взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимый оператор. $\square$

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Тем самым, $\mathcal{A}$ – взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимый оператор. $\square$

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1}.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Тем самым, $\mathcal{A}$ – взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимый оператор. $\square$

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1}.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$-матрице A слева единичную $n \times n$-матрицу и проделаем над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1}.

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Тем самым, $\mathcal{A}$ – взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимый оператор. □

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1}.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$-матрице A слева единичную $n \times n$-матрицу и проделаем над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1}.

Замечание: можно приписывать единичную матрицу сверху и проделывать элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$. Тогда A^{-1} возникнет в «числителе», когда «знаменатель» станет равным E.

Пример вычисления обратной матрицы

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

Пример вычисления обратной матрицы

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Пример вычисления обратной матрицы

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)?

Обоснование алгоритма

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками!

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Обоснование алгоритма

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n, ее столбцы линейно независимы.

Обоснование алгоритма

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n, ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.

Обоснование алгоритма

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n, ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.
С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n, ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент.
С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1.

Обоснование алгоритма (2)

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. В силу линейной независимости столбцов никакой столбец не может выражаться через предыдущие столбцы.

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. В силу линейной независимости столбцов никакой столбец не может выражаться через предыдущие столбцы. Поэтому на шаге, когда обработаны первые j столбцов ($j < n$), среди «поддиагональных» элементов $(j+1)$-го столбца найдется ненулевой, и процесс можно продолжать, пока не будут обработаны все n столбцов.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма о элементарных преобразованиях

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Для каждого элементарного преобразования над столбцами (строками) A построим матрицу, умножение на которую справа (слева) дает тот же результат.

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».

Лемма о элементарных преобразованиях – интуиция

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E.

Лемма о элементарных преобразованиях – построение

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E. Та матрица T, которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Лемма о элементарных преобразованиях – построение

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E. Та матрица T, которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Перестановка i-го и j-го столбцов (i-й и j-й строк) матрицы A равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},
$$

которая получается, если в единичной матрице переставить i-й и j-й столбцы (или, что равносильно, переставить i-ю и j-ю строки).

Добавление к i-му столбцу матрицы A ее j-го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-му столбцу j-й столбец.

Добавление к i-му столбцу матрицы A ее j-го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$\begin{array}{c@{}c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & {\color{red}1} & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & {\color{red}0} & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-му столбцу j-й столбец. Аналогично, добавление к i-й строке матрицы A ее j-й строки равносильно умножению A слева на матрицу, которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-й строке j-ю строку (показано красным).

Умножение i-го столбца (i-й строки) матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$ равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице умножить i-й столбец (или, что равносильно, i-ю строку) на λ. $\square$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \ldots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \ldots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X.

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \ldots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \ldots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \ldots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \ldots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$.

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \dots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \quad \text{и} \quad T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. $\square$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \dots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \dots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \ \text{ и } \ T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. $\square$

Замечание: аналогично обосновывается «вертикальный» вариант алгоритма, когда единичную матрицу приписывают сверху и проделывают элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$ до тех пор, пока «знаменатель» не станет равным E.

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений.

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений. Рассмотрим произвольную систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{$\star$}$$

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений. Рассмотрим произвольную систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{k1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \qquad (\star)$$

Систему $(\star)$ можно компактно записать в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, если ввести

обозначения: $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ – *основная матрица* системы,

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ – столбцы неизвестных и свободных членов.

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений. Рассмотрим произвольную систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \qquad (\star)$$

Систему $(\star)$ можно компактно записать в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, если ввести обозначения: $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ – *основная матрица* системы,

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ – столбцы неизвестных и свободных членов.

Матрица размера $k \times (n+1)$, получаемая приписыванием к основной матрице системы столбца свободных членов называется *расширенной матрицей* системы $(\star)$.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы $(\star)$ через B. Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B, – через V_B.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы $(\star)$ через B. Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B, – через V_B.

Заметим, что система $(\star)$ может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Следовательно, система $(\star)$ совместна в том и только в том случае, когда вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, т.е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы $(\star)$ через B. Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B, – через V_B.
Заметим, что система $(\star)$ может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Следовательно, система $(\star)$ совместна в том и только в том случае, когда вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, т.е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система $(\star)$ совместна. Тогда вектор $\mathbf{b}$ принадлежит пространству V_A. Это значит, что вектора-столбцы матрицы B принадлежат V_A, и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B. Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т.е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B. В силу теоремы о ранге матрицы ранги матриц A и B равны.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т.е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B. Вектор **b** принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, а значит, и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система $(\star)$ совместна. $\square$

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т.е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B. Вектор **b** принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, а значит, и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система $(\star)$ совместна. $\square$

Теорема Кронекера–Капелли называется:

- теоремой Кронекера–Капелли в Австрии, Германии, Польше и России;
- теоремой Руше–Капелли в Италии и англоязычных странах;
- теоремой Руше–Фонтене во Франции;
- теоремой Руше–Фробениуса в Испании и странах Латинской Америки;
- теоремой Фробениуса в Чехии и Словакии.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т.е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B. Вектор **b** принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, а значит, и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система $(\star)$ совместна. $\square$

Теорема Кронекера–Капелли называется:

- теоремой Кронекера–Капелли в Австрии, Германии, Польше и России;
- теоремой Руше–Капелли в Италии и англоязычных странах;
- теоремой Руше–Фонтене во Франции;
- теоремой Руше–Фробениуса в Испании и странах Латинской Америки;
- теоремой Фробениуса в Чехии и Словакии.

Она была впервые опубликована в 1867 г. английским математиком Чарльзом Доджсоном, более известным под псевдонимом Льюис Кэрролл как автор «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье».

Метод Гаусса

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \qquad (L_1) \\ -3x - y + 2z &= -11 \qquad (L_2) \\ -2x + y + 2z &= -3 \qquad (L_3) \end{aligned}$$

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 && (L_1)\\ -3x - y + 2z &= -11 && (L_2)\\ -2x + y + 2z &= -3 && (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ -3 & -1 & 2 & -11\\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \qquad (L_1) \\ -3x - y + 2z &= -11 \qquad (L_2) \\ -2x + y + 2z &= -3 \qquad (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 & \quad (L_1)\\ -3x - y + 2z &= -11 & \quad (L_2)\\ -2x + y + 2z &= -3 & \quad (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ -3 & -1 & 2 & -11\\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь $(**)$ – это $L_3 - 4L_2 \to L_3$.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 &\qquad (L_1)\\ -3x - y + 2z &= -11 &\qquad (L_2)\\ -2x + y + 2z &= -3 &\qquad (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ -3 & -1 & 2 & -11\\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь $(**)$ – это $L_3 - 4L_2 \to L_3$.

Видим, что ранги основной и расширенной матриц совпадают, значит, система совместна.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \qquad (L_1)\\ -3x - y + 2z &= -11 \qquad (L_2)\\ -2x + y + 2z &= -3 \qquad (L_3)\end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ -3 & -1 & 2 & -11\\ -2 & 1 & 2 & -3\end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5\end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5\end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$ Здесь $(**)$ – это $L_3 - 4L_2 \to L_3$.

Видим, что ранги основной и расширенной матриц совпадают, значит, система совместна. Далее, видно, что $z = -1$.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x+y-\ z&=\ 8 && (L_1)\\ -3x-y+2z&=-11 && (L_2)\\ -2x+y+2z&=\ -3 && (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ -3 & -1 & 2 & -11\\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2+\frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3+L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ Здесь $(**)$ – это $L_3-4L_2 \to L_3$.

Видим, что ранги основной и расширенной матриц совпадают, значит, система совместна. Далее, видно, что $z=-1$. Зная z, находим $y=3$.

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 8 \qquad (L_1) \\ -3x - y + 2z &= -11 \qquad (L_2) \\ -2x + y + 2z &= -3 \qquad (L_3) \end{aligned}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь $(**)$ – это $L_3 - 4L_2 \to L_3$.

Видим, что ранги основной и расширенной матриц совпадают, значит, система совместна. Далее, видно, что $z = -1$. Зная z, находим $y = 3$. Наконец, зная z и y, находим $x = 2$.