Тема V: Линейные операторы

§ 3. Умножение операторов. Ранг матрицы

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F.

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \ \text{ для всех } \ \mathbf{x} \in V_1.$$

Умножение линейных операторов

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

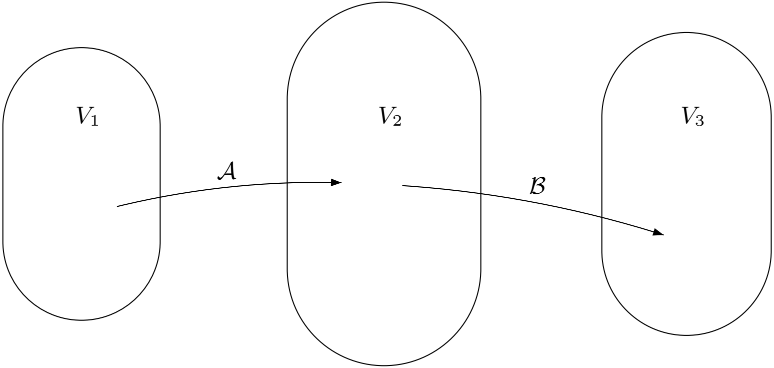
$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \ \text{ для всех } \ \mathbf{x} \in V_1.$$

Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \text{ для всех } \mathbf{x} \in V_1.$$

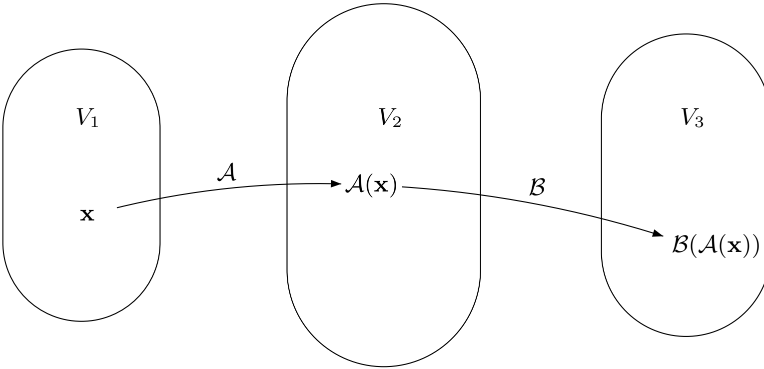
Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \text{ для всех } \mathbf{x} \in V_1.$$

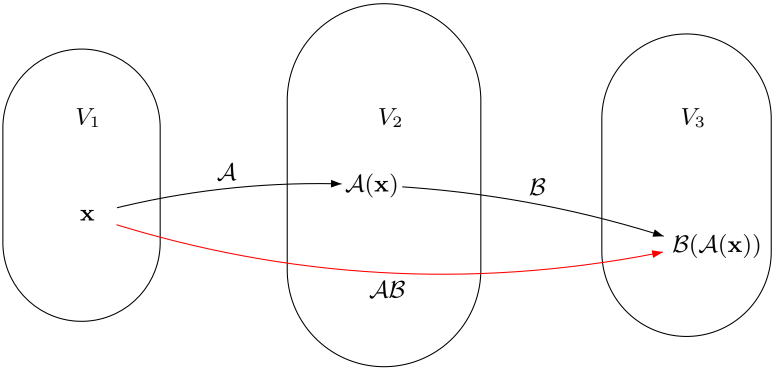
Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V_1.$$

Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))$$

Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

Доказательство. Для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V_1$ имеем

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))$$

Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))$$

Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{AB}(\mathbf{x})+\mathcal{AB}(\mathbf{y}).$$

Предложение

Произведение линейных операторов – линейный оператор.

Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{AB}(\mathbf{x})+\mathcal{AB}(\mathbf{y}).$$

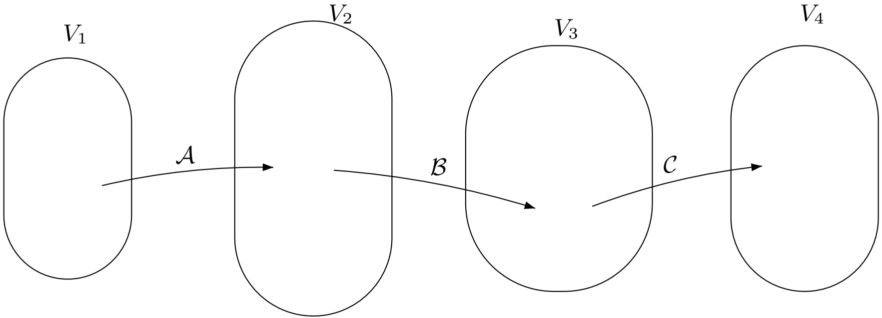
Так же проверяется, что $\mathcal{AB}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{AB}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $t \in F$. $\square$

Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$

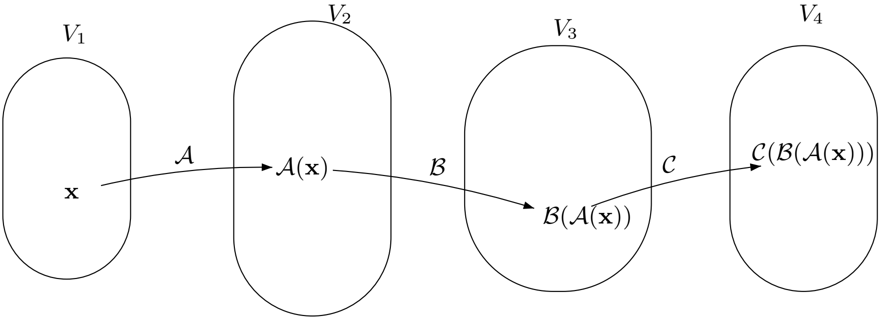
Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



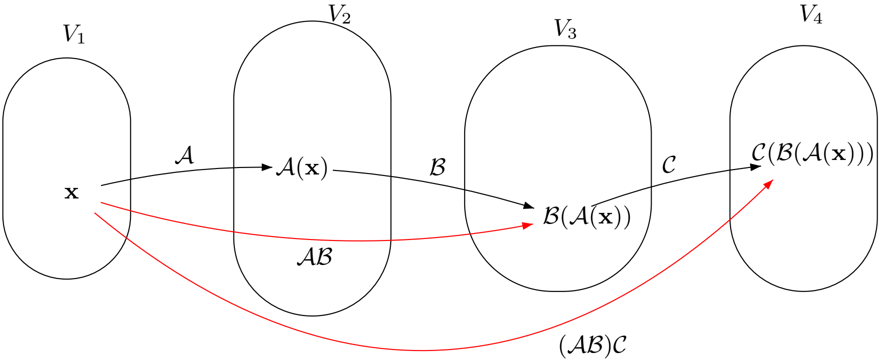
Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



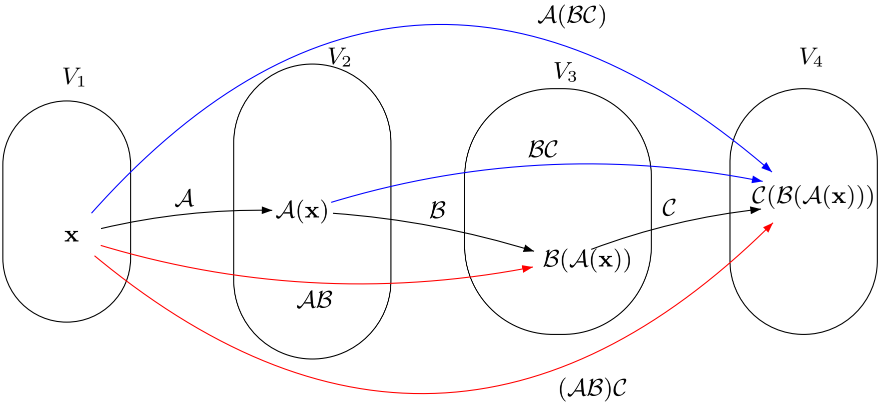
Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



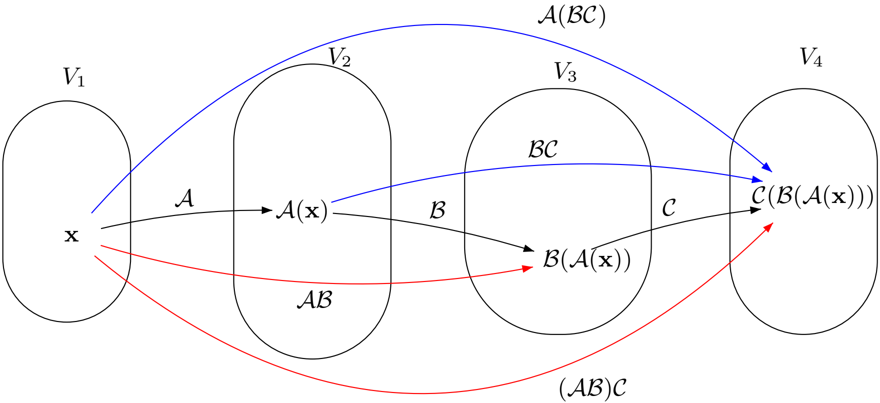
Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{AB})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{BC}).$$



Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



Ассоциативность – свойство композиции произвольных отображений.

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}))$$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

$$= \mathcal{A}\mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}\mathcal{C}(\mathbf{x})$$

Свойства умножения линейных операторов (2)

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) + \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

$$= \mathcal{A}\mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x}).$$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

$$= \mathcal{A}\mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathcal{C}+\mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x}).$$

Аналогично проверяется дистрибутивность справа. $\square$

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) + \mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

$$= \mathcal{A}\mathcal{C}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}\mathcal{C}(\mathbf{x}) = (\mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C})(\mathbf{x}).$$

Аналогично проверяется дистрибутивность справа. $\square$

Дистрибутивность уже использует специфику линейных операторов; скажем, при композиции произвольных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ее нет. (*Докажите!*)

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ *всех линейных операторов пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных операторов.*

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ *всех линейных операторов пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных операторов.*

Упражнения. 1. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим оператор дифференцирования: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Как действует квадрат оператора $\mathcal{D}$?

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ *всех линейных операторов пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных операторов.*

Упражнения. 1. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим оператор дифференцирования: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Как действует квадрат оператора $\mathcal{D}$?

2. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ – оператор поворота плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол α. Как действует произведение $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta$?

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V, V)$ *всех линейных операторов пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных операторов.*

Упражнения. 1. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим оператор дифференцирования: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Как действует квадрат оператора $\mathcal{D}$?

2. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ – оператор поворота плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол α. Как действует произведение $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta$?

3. Приведите пример двух линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, таких, что $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k \times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m \times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{A}\mathcal{B}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу оператора имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \big[\mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbf{x})\big]_R$$

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k \times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m \times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m \times n}$ произведения $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу оператора имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \big[\mathcal{AB}(\mathbf{x})\big]_R = \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big]_R$$

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу оператора имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \big[\mathcal{AB}(\mathbf{x})\big]_R = \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big]_R = B\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q$$

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные операторы, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ оператора $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ оператора $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{A}\mathcal{B}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу оператора имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \big[\mathcal{A}\mathcal{B}(\mathbf{x})\big]_R = \big[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\big]_R = B\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = B(A[\mathbf{x}]_P).$$

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Матрица произведения операторов (2)

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P)$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C.

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P)$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C. Итак, первый столбец матрицы C есть произведение матрицы B на первый столбец матрицы A.

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P)$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C. Итак, первый столбец матрицы C есть произведение матрицы B на первый столбец матрицы A.
Полагая в том же равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ и т.д., получим, что каждый столбец матрицы C есть произведение B на столбец матрицы A с тем же номером.

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено в §V.1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P)$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C. Итак, первый столбец матрицы C есть произведение матрицы B на первый столбец матрицы A.

Полагая в том же равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ и т.д., получим, что каждый столбец матрицы C есть произведение B на столбец матрицы A с тем же номером. Другими словами, элемент матрицы C, стоящий на месте i, j есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы B на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A (правило «строка на столбец»).

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей.

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H.

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H. Если $G = (g_{ij})_{p\times\ell}$, а $H = (h_{ij})_{\ell\times q}$, то *произведением* матриц G и H называется матрица $GH = (f_{ij})_{p\times q}$, где f_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы G на соответствующие элементы j-го столбца матрицы H:

$$f_{ij} := g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j} + \cdots + g_{i\ell}h_{\ell j} \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, q.$$

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H. Если $G = (g_{ij})_{p\times\ell}$, а $H = (h_{ij})_{\ell\times q}$, то *произведением* матриц G и H называется матрица $GH = (f_{ij})_{p\times q}$, где f_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы G на соответствующие элементы j-го столбца матрицы H:

$$f_{ij} := g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j} + \cdots + g_{i\ell}h_{\ell j} \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, q.$$

Возвращаясь к произведениям линейных операторов, заключаем, что при соответствии, которое сопоставляет линейному оператору его матрицу, выполнено равенство

$$[\mathcal{AB}]_{P,R} = [\mathcal{B}]_{Q,R}[\mathcal{A}]_{P,Q}.$$

Видим, что матрица произведения линейных операторов получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H. Если $G = (g_{ij})_{p\times\ell}$, а $H = (h_{ij})_{\ell\times q}$, то *произведением* матриц G и H называется матрица $GH = (f_{ij})_{p\times q}$, где f_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы G на соответствующие элементы j-го столбца матрицы H:

$$f_{ij} := g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j} + \cdots + g_{i\ell}h_{\ell j} \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, q.$$

Возвращаясь к произведениям линейных операторов, заключаем, что при соответствии, которое сопоставляет линейному оператору его матрицу, выполнено равенство

$$[\mathcal{AB}]_{P,R} = [\mathcal{B}]_{Q,R}[\mathcal{A}]_{P,Q}.$$

⚠ Матрицы операторов перемножаются в порядке, обратном тому, в котором записаны операторы.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно!

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно! Даже для квадратных матриц A и B одинакового размера, когда оба произведения AB и BA определены, как правило, $AB \neq BA$.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно! Даже для квадратных матриц A и B одинакового размера, когда оба произведения AB и BA определены, как правило, $AB \neq BA$.

Упражнение: составьте две 2×2-матрицы из цифр даты своего рождения. Например, для даты 01.02.2003 эти матрицы будут $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно! Даже для квадратных матриц A и B одинакового размера, когда оба произведения AB и BA определены, как правило, $AB \neq BA$.

Упражнение: составьте две 2×2-матрицы из цифр даты своего рождения. Например, для даты 01.02.2003 эти матрицы будут $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Перемножьте эти матрицы в разном порядке и сравните результаты.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов.

Свойства умножения матриц (2)

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, s$.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\Big[\Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\Big)\cdot c_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} =$$

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left[\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)\cdot c_{kj}\right] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} =$$
$$= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\left[a_{i\ell}\cdot\left(\sum_{k=1}^{r} b_{\ell k}c_{kj}\right)\right] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}f_{\ell j} = h_{ij}. \qquad \square$$

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных операторов. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\Big[\Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\Big)\cdot c_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\Big[a_{i\ell}\cdot\Big(\sum_{k=1}^{r} b_{\ell k}c_{kj}\Big)\Big] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}f_{\ell j} = h_{ij}. \qquad \square$$

Упражнение: докажите свойство 4): если произведение AB определено, то

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*.

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$ Это не что иное как матрица единичного оператора $\mathcal{E}$.

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Это не что иное как матрица единичного оператора $\mathcal{E}$.
Можно также записать $E_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$, используя *символ Кронекера*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Это не что иное как матрица единичного оператора $\mathcal{E}$.
Можно также записать $E_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$, используя *символ Кронекера*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Свойство единичной матрицы

Если произведение AE [соответственно EA] определено, то $AE = A$ [соответственно $EA = A$].

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)+\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Так же проверяется, что $\mathcal{A}^{-1}(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)+\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Так же проверяется, что $\mathcal{A}^{-1}(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Вспомним, что взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2 мы называли *изоморфизмом*.

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначный линейный оператор векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1) + \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Так же проверяется, что $\mathcal{A}^{-1}(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Вспомним, что взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2 мы называли *изоморфизмом*. У изоморфных пространств одинаковы размерности, поэтому матрица обратимого линейного отображения будет *квадратной*.

Обратная матрица

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Обратная матрица

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$.

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a.

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}.

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}. В соответствии с этим, матрица B такая, что $AB = BA = E$ для данной матрицы A называется *обратной* к матрице A и обозначается через A^{-1}.

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичный оператор пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичный оператор пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}. В соответствии с этим, матрица B такая, что $AB = BA = E$ для данной матрицы A называется *обратной* к матрице A и обозначается через A^{-1}.

Возникает два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Чтобы ответить на первый вопрос, введем одно новое понятие, которое будет полезно и во многих других задачах.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная!) матрица.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать.

План доказательства

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы докажем, что элементарные преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам.

План доказательства

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы докажем, что элементарные преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

План доказательства

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы докажем, что элементарные преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

Напомним список элементарных преобразований:

- I: Перестановка двух столбцов (строк).
- II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).
- III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

План доказательства

Теорема о ранге матрицы позволяет говорить просто «*ранг матрицы*», не уточняя, о каком ранге идет речь – по столбцам или по строкам. Но сначала нужно ее доказать. Теорема далеко не очевидна!

План доказательства таков: мы докажем, что элементарные преобразования не меняют ни ранг по столбцам, ни ранг по строкам. Затем мы покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к такой матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам будет очевидным.

Напомним список элементарных преобразований:

I: Перестановка двух столбцов (строк).

II: Прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки).

III: Умножение столбца (строки) на ненулевой скаляр.

Мы доказывали, что элементарные преобразования обратимы. Это значит, что если над столбцами (строками) некоторой матрицы A выполнить произвольную последовательность элементарных преобразований, то над столбцами (строками) получившейся матрицы можно выполнить последовательность элементарных преобразований, которая приведет к исходной матрице A.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Элементарные преобразования сохраняют ранги

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Лемма 1

Элементарные преобразования над столбцами матрицы не увеличивают ранг матрицы по столбцам.

Напомним первый пункт плана доказательства теоремы о ранге: показать, что элементарные преобразования сохраняют ранг по столбцам/строкам. Из замечания об обратимости элементарных преобразований вытекает, что для этого достаточно проверить, что элементарные преобразования *не увеличивают* ранг по столбцам/строкам. Действительно, пусть известно, что ранг по столбцам/строкам не растет при элементарных преобразованиях, но какая-то последовательность преобразований приводит матрицу A к матрице A', ранг которой (по столбцам или строкам) строго меньше соответствующего ранга матрицы A. Тогда последовательность преобразований, которая приводит A' обратно к A, строго увеличивает ранг, противоречие!

Лемма 1

Элементарные преобразования над столбцами матрицы не увеличивают ранг матрицы по столбцам.

Доказательство. Ранг матрицы A по столбцам – это размерность $\dim S$ подпространства S, порождённого столбцами матрицы A. Элементарные преобразования над столбцами матрицы A приводят к матрице A', столбцы которой лежат в S, поэтому подпространство S', порождённое столбцами матрицы A', содержится в S. Отсюда $\dim S' \leqslant \dim S$. $\square$

Применяя лемму 1 к матрице A^T, получаем симметричный результат:

Лемма 2

Элементарные преобразования над строками матрицы не увеличивают ранг матрицы по строкам.

Элементарные преобразования сохраняют ранги (2)

Применяя лемму 1 к матрице A^T, получаем симметричный результат:

Лемма 2

Элементарные преобразования над строками матрицы не увеличивают ранг матрицы по строкам.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Применяя лемму 1 к матрице A^T, получаем симметричный результат:

Лемма 2

Элементарные преобразования над строками матрицы не увеличивают ранг матрицы по строкам.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Доказательство. Пусть в матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$
строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы в пространстве строк.

Применяя лемму 1 к матрице A^T, получаем симметричный результат:

Лемма 2

Элементарные преобразования над строками матрицы не увеличивают ранг матрицы по строкам.

Лемма 3

Элементарные преобразования над столбцами матрицы сохраняют линейные зависимости между ее строками.

Доказательство. Пусть в матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы в пространстве строк. Докажем, что и в матрице A', полученной из A применением какой-то последовательности элементарных преобразований над столбцами, строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ остаются линейно зависимыми, причем с теми же коэффициентами!

Итак, пусть строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы.

Элементарные преобразования сохраняют ранги (3)

Итак, пусть строки матрицы

$$\begin{array}{r c}
 & \\
 & \\
\color{red}{\gamma_1 \times} & \\
\vdots & \\
\color{red}{\gamma_s \times} & \\
 & \\
 &
\end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \ \text{ для каждого } \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\star)$$

Итак, пусть строки матрицы

$$\begin{array}{r} \\ \\ \gamma_1\times \\ \vdots \\ \gamma_s\times \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \text{ для каждого } j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\star)$$

Если выполнить элементарное преобразование I-го рода (поменять местами j_1-й и j_2-й столбцы матрицы A), то в системе $(\star)$ просто поменяются местами j_1-е и j_2-е равенства, т.е. система не изменится.

Итак, пусть строки матрицы

$$\begin{array}{r} \\ \\ \gamma_1 \times \\ \vdots \\ \gamma_s \times \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 j} & \dots & a_{i_1 n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_s 1} & a_{i_s 2} & \dots & a_{i_s j} & \dots & a_{i_s n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}$$

с номерами $i_1, \dots, i_s$ линейно зависимы. Найдутся такие скаляры $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, не все равные нулю, что выполнена система равенств

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \dots + \gamma_s a_{i_s j} = 0 \ \text{ для каждого } \ j = 1, 2, \dots, n. \qquad (\star)$$

Если выполнить элементарное преобразование I-го рода (поменять местами j_1-й и j_2-й столбцы матрицы A), то в системе $(\star)$ просто поменяются местами j_1-е и j_2-е равенства, т.е. система не изменится. Поэтому в преобразованной матрице строки с номерами $i_1, \dots, i_s$ остаются линейно зависимыми.

Если выполнить элементарное преобразование II-го рода (прибавить к j_1-му столбцу матрицы A ее j_2-й столбец), то все равенства системы

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j} = 0, \qquad (\star)$$

кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1(a_{i_1 j_1} + a_{i_1 j_2}) + \cdots + \gamma_s(a_{i_s j_1} + a_{i_s j_2}) =$$
$$= (\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_1}) + (\gamma_1 a_{i_1 j_2} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_2}) = 0 + 0 = 0.$$

Если выполнить элементарное преобразование II-го рода (прибавить к j_1-му столбцу матрицы A ее j_2-й столбец), то все равенства системы

$$\gamma_1 a_{i_1 j} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j} = 0, \qquad (\star)$$

кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1(a_{i_1 j_1} + a_{i_1 j_2}) + \cdots + \gamma_s(a_{i_s j_1} + a_{i_s j_2}) =$$
$$= (\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_1}) + (\gamma_1 a_{i_1 j_2} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_2}) = 0 + 0 = 0.$$

Аналогично, если выполнить элементарное преобразование III-го рода (умножить j_1-й столбец матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$), то все равенства системы $(\star)$, кроме j_1-го, не изменятся, но и равенство, соответствующее j_1-му столбцу, останется верным, поскольку его левая часть примет вид

$$\gamma_1(\lambda a_{i_1 j_1}) + \cdots + \gamma_s(\lambda a_{i_s j_1}) = \lambda(\gamma_1 a_{i_1 j_1} + \cdots + \gamma_s a_{i_s j_1}) = \lambda \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_s$.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \dots, i_s$. По лемме 3 строки матрицы A с теми же номерами $i_1, \dots, i_s$ обязаны быть линейно независимыми, откуда ранг матрицы A по строкам не меньше s.

Применяя лемму 3 к транспонированной матрице, получаем симметричный результат:

Лемма 4

Элементарные преобразования над строками матрицы сохраняют линейные зависимости между ее столбцами.

Из лемм 3 и 4 уже легко вывести нужный нам факт:

Следствие

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы не увеличивают ранг по строкам (столбцам).

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований над столбцами и ранг матрицы A' по строкам равен s. Тогда в A' есть s линейно независимых строк, скажем, с номерами $i_1, \ldots, i_s$. По лемме 3 строки матрицы A с теми же номерами $i_1, \ldots, i_s$ обязаны быть линейно независимыми, откуда ранг матрицы A по строкам не меньше s. Тот же аргумент выводит симметричный результат из леммы 4. $\square$

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам.

Завершение доказательства теоремы о ранге

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Завершение доказательства теоремы о ранге

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0.

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0. Если в A есть ненулевой элемент, то с помощью преобразований I-го рода переставим этот элемент на место 1,1, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1.

Итак, мы реализовали первую часть нашего плана, показав, что элементарные преобразования не меняют ранги по столбцам/строкам. Займемся второй частью: покажем, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу A можно привести к матрице, для которой равенство рангов по столбцам и строкам очевидно.

Если все элементы матрицы A равны 0, то понятно, что ранги A и по столбцам, и по строкам равны 0. Если в A есть ненулевой элемент, то с помощью преобразований I-го рода переставим этот элемент на место 1,1, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов «обнулим» все остальные элементы первой строки и первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Завершение доказательства теоремы о ранге (2)

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1.

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1. Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i, j \geq 2$, то преобразованиями I-го рода переставим элемент b_{ij} на место 2,2, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1.

Если в подматрице $\begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ все элементы нулевые, то мы привели матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что ранги такой матрицы и по столбцам, и по строкам равны 1. Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i, j \geq 2$, то преобразованиями I-го рода переставим элемент b_{ij} на место 2,2, а затем с помощью преобразования III-го рода сделаем его равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов «обнулим» все остальные элементы второй строки и второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & b_{2j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Завершение доказательства теоремы о ранге (3)

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0.

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк.

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк. Теорема о ранге доказана. $\square$

Ясно, что продолжая описанный процесс, мы приведем матрицу A к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;...; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. У матрицы такого вида ранги и по столбцам, и по строкам очевидно равны r: первые r столбцов линейно независимы, а остальные нулевые, и то же верно для строк. Теорема о ранге доказана. $\square$

Сформулируем еще раз результат, который мы доказали:

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – линейный оператор конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – линейный оператор конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* $\mathcal{A}$ мы называли размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – линейный оператор конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* $\mathcal{A}$ мы называли размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если и пространство V_2 конечномерно, с оператором $\mathcal{A}$ связывается его матрица $[\mathcal{A}]$, столбцы которой – это координаты образов элементов базиса пространства V_1 в базисе пространства V_2.

Ранг линейного оператора и ранг его матрицы

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – линейный оператор конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* $\mathcal{A}$ мы называли размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если и пространство V_2 конечномерно, с оператором $\mathcal{A}$ связывается его матрица $[\mathcal{A}]$, столбцы которой – это координаты образов элементов базиса пространства V_1 в базисе пространства V_2. Образы элементов базиса пространства V_1 порождают $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, поэтому размерность образа равна размерности подпространства, порождённого набором столбцов матрицы $[\mathcal{A}]$, т.е. рангу матрицы $[\mathcal{A}]$.

Ранг линейного оператора и ранг его матрицы

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – линейный оператор конечномерного векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2. Напомним, что *рангом* $\mathcal{A}$ мы называли размерность подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Если и пространство V_2 конечномерно, с оператором $\mathcal{A}$ связывается его матрица $[\mathcal{A}]$, столбцы которой – это координаты образов элементов базиса пространства V_1 в базисе пространства V_2. Образы элементов базиса пространства V_1 порождают $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, поэтому размерность образа равна размерности подпространства, порождённого набором столбцов матрицы $[\mathcal{A}]$, т.е. рангу матрицы $[\mathcal{A}]$.

Итак, ранг линейного оператора равен рангу его матрицы!