Тема V: Линейные операторы

§ 4. Применения ранга

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная матрица с элементами из некоторого поля F.

Рангом матрицы по столбцам называется размерность подпространства, порождённого набором столбцов матрицы A, в пространстве всех столбцов высоты k над полем F.

Рангом матрицы по строкам называется размерность подпространства, порождённого набором строк матрицы A, в пространстве всех строк длины n над полем F.

Мы доказали следующий важный результат:

Теорема о ранге матрицы

Ранги произвольной матрицы по строкам и по столбцам совпадают.

Доказательство теоремы о ранге дает способ вычисления ранга. Достаточно с помощью элементарных преобразований над столбцами и строками матрицы A привести ее к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где на местах 1,1; 2,2;. . . ; r, r стоят 1, а на всех остальных местах стоят 0. Число r и будет рангом матрицы A.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равен 2.

На практике достаточно привести матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки ступенчатой матрицы линейно независимы, поэтому их число равно рангу матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -0 & 0 \end{pmatrix}$$

Уже отсюда видно, что ранг равен 2

Напомним, что матрица A *обратима*, если существует *обратная* к A матрица A^{-1}.

Мы поставили два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?

Теперь мы готовы на них ответить.

Предложение

Квадратная матрица размера $n \times n$ обратима тогда и только тогда, когда её ранг равен n.

Доказательство. С каждой $n \times n$-матрицей A связан линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства столбцов высоты n, определенный правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для любого вектора-столбца $\mathbf{x}$. При этом матрица A будет матрицей оператора $\mathcal{A}$ (в стандартном базисе пространства столбцов). Матрица $A = [\mathcal{A}]$ обратима тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A}$ обратим, его образ совпадает со всем пространством столбцов, а значит, ранг $\mathcal{A}$ равен n. Так как ранг линейного оператора совпадает с рангом его матрицы, заключаем, что ранг A равен n.

Обратимые матрицы (2)

Обратно, если ранг матрицы A равен n, то ранг оператора $\mathcal{A}$ равен n. Значит, образ $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством столбцов, т.е. $\mathcal{A}$ – отображение пространства столбцов на себя. По теореме о ранге и дефекте ядро оператора $\mathcal{A}$ нулевое. Покажем, что тогда $\mathcal{A}$ взаимно однозначен. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых векторов-столбцов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Тем самым, $\mathcal{A}$ – взаимно однозначное отображение пространства столбцов на себя, т.е. обратимый оператор. □

Теперь ответим на вопрос, как вычислить A^{-1}.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

Припишем к обратимой $n \times n$-матрице A слева единичную $n \times n$-матрицу и проделаем над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ последовательность элементарных преобразований, которая приведет A к единичной матрице. Левая половина получившейся матрицы будет равна матрице A^{-1}.

Замечание: можно приписывать единичную матрицу сверху и проделывать элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$. Тогда A^{-1} возникнет в «числителе», когда «знаменатель» станет равным E.

Пример вычисления обратной матрицы

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим матрицу A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} \color{red}{-1} & \color{red}{-5} & \color{red}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{1} & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{red}{4} & \color{red}{-5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Чтобы обосновать предложенный алгоритм, нужно объяснить, почему эта процедура (1) заканчивается и (2) приводит именно к обратной матрице.

В чем проблема с (1)? Доказательство теоремы о ранге позволяет привести $n \times n$-матрицу A ранга n к единичной матрице с помощью элементарных преобразований *над строками и столбцами*, но в алгоритме разрешены преобразования только над строками! Покажем, что матрицу A можно привести к единичной матрице, оперируя только со строками.

Поскольку ранг матрицы A по столбцам равен n, ее столбцы линейно независимы. Поэтому в первом столбце A есть ненулевой элемент. С помощью перестановки строк переставим его на место 1,1, а затем, домножив первую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 1,1 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы первого столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обоснование алгоритма (2)

Второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ не может выражаться через первый, поэтому среди его «поддиагональных» элементов $b_{22}, \dots, b_{n2}$ должен быть ненулевой. С помощью перестановки строк переставим его на место 2,2, а затем, домножив вторую строку на обратный элемент, сделаем элемент на месте 2,2 равным 1. Теперь с помощью преобразований II-го и III-го родов над строками обнулим остальные элементы второго столбца:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II,III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & d_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Продолжим в том же духе. В силу линейной независимости столбцов никакой столбец не может выражаться через предыдущие столбцы. Поэтому на шаге, когда обработаны первые j столбцов $(j < n)$, среди «поддиагональных» элементов $(j+1)$-го столбца найдется ненулевой, и процесс можно продолжать, пока не будут обработаны все n столбцов.

Итак, манипулируя со строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$, можно привести A к единичной матрице. Почему при этом матрица E превратится в A^{-1}?

Для обоснования потребуется один факт, полезный и в других случаях.

Лемма

Элементарные преобразования над столбцами (строками) матрицы A равносильны умножению A справа (слева) на некоторые матрицы.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

– произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Для каждого элементарного преобразования над столбцами (строками) A построим матрицу, умножение на которую справа (слева) дает тот же результат.

Идея построения такова. Элементарному преобразованию не важно, какие именно элементы составляют матрицу; оно манипулирует со столбцами (строками) независимо от их «содержимого».

Поэтому можно найти матрицу, умножение на которую дает тот же результат, что и применение данного элементарного преобразования, применив это преобразование *к единичной матрице* E. Та матрица T, которая при этом получится, и будет искомой, так как $ET = TE = T$.

Перестановка i-го и j-го столбцов (i-й и j-й строк) матрицы A равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице переставить i-й и j-й столбцы (или, что равносильно, переставить i-ю и j-ю строки).

Добавление к i-му столбцу матрицы A ее j-го столбца равносильно умножению A справа на матрицу

$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0\color{red}{1} & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 1\color{red}{0} & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array},
$$

которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-му столбцу j-й столбец. Аналогично, добавление к i-й строке матрицы A ее j-й строки равносильно умножению A слева на матрицу, которая получается, если в единичной матрице прибавить к i-й строке j-ю строку (показано красным).

Лемма о элементарных преобразованиях – построение (3)

Умножение i-го столбца (i-й строки) матрицы A на скаляр $\lambda \neq 0$ равносильно умножению A справа (слева) на матрицу

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \lambda & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}
\end{array},$$

которая получается, если в единичной матрице умножить i-й столбец (или, что равносильно, i-ю строку) на λ. $\square$

Рассмотрим последовательность элементарных преобразований $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ над строками $n \times 2n$-матрицы $E|A$ такую, что

$$E|A \xrightarrow{\varepsilon_1} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_s} B|E.$$

Пусть $T_1, \ldots, T_s$ – такие $n \times n$-матрицы, что для каждого $k = 1, \ldots, s$ умножение произвольной матрицы X слева на T_k дает тот же результат, что и применение преобразования ε_k к строкам этой матрицы X. Тогда

$$T_s \cdots T_1 E = B \ \text{ и } \ T_s \cdots T_1 A = E.$$

В силу второго равенства $T_s \cdots T_1 = A^{-1}$, а в силу первого $T_s \cdots T_1 = B$. Итак, $B = A^{-1}$. □

Замечание: аналогично обосновывается «вертикальный» вариант алгоритма, когда единичную матрицу приписывают сверху и проделывают элементарные преобразования со столбцами $2n \times n$-матрицы $\dfrac{E}{A}$ до тех пор, пока «знаменатель» не станет равным E.

Теперь покажем, как понятие ранга может быть использовано для анализа систем линейных уравнений. Рассмотрим произвольную систему k линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \qquad (\star)$$

Систему $(\star)$ можно компактно записать в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, если ввести обозначения: $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ – *основная матрица* системы,

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ – столбцы неизвестных и свободных членов.

Матрица размера $k \times (n+1)$, получаемая приписыванием к основной матрице системы столбца свободных членов называется *расширенной матрицей* системы $(\star)$.

Теорема Кронекера–Капелли

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Обозначим расширенную матрицу системы $(\star)$ через B. Вектора-столбцы матрицы A будем обозначать через $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы A, условимся обозначать через V_A, а пространство, порожденное векторами-столбцами матрицы B, – через V_B.
Заметим, что система $(\star)$ может быть записана в виде векторного равенства $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$. Следовательно, система $(\star)$ совместна в том и только в том случае, когда вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы A, т.е. когда $\mathbf{b} \in V_A$.

Пусть система $(\star)$ совместна. Тогда вектор $\mathbf{b}$ принадлежит пространству V_A. Это значит, что вектора-столбцы матрицы B принадлежат V_A, и поэтому $V_B \subseteq V_A$. Но столбцы матрицы A являются столбцами матрицы B. Отсюда следует, что $V_A \subseteq V_B$. Следовательно, $V_A = V_B$. Но тогда и $\dim V_A = \dim V_B$, т.е. ранг по столбцам матрицы A равен рангу по столбцам матрицы B. В силу теоремы о ранге матрицы ранги матриц A и B равны.

Предположим теперь, что ранги матриц A и B равны. Положим $r = r(A) = r(B)$. Базис пространства V_A состоит из r векторов. Для удобства обозначений будем считать что он состоит из первых r векторов-столбцов матрицы A, т.е. из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$. Эти вектора принадлежат и пространству V_B. Размерность пространства V_B равна r. Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ образуют базис пространства V_B. Вектор **b** принадлежит V_B и потому является линейной комбинацией базисных векторов. Итак, вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$, а значит, и линейной комбинацией всей системы векторов-столбцов матрицы A. Следовательно, система $(\star)$ совместна. □

Теорема Кронекера–Капелли называется:

- теоремой Кронекера–Капелли в Австрии, Германии, Польше и России;
- теоремой Руше–Капелли в Италии и англоязычных странах;
- теоремой Руше–Фонтене во Франции;
- теоремой Руше–Фробениуса в Испании и странах Латинской Америки;
- теоремой Фробениуса в Чехии и Словакии.

Она была впервые опубликована в 1867 г. английским математиком Чарльзом Доджсоном, более известным под псевдонимом Льюис Кэрролл как автор «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье».

На практике ранги основной и расширенной матриц вычисляют одновременно, приводя их к ступенчатому виду. Если система оказывается совместной, из полученной матрицы можно сразу же извлечь решение.

Пример: исследуем и решим таким способом систему

$$\begin{array}{rcrl} 2x + y - z &=& 8 & \qquad (L_1) \\ -3x - y + 2z &=& -11 & \qquad (L_2) \\ -2x + y + 2z &=& -3 & \qquad (L_3) \end{array}$$

Выпишем расширенную матрицу $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{(*)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$

Здесь $(*)$ – это $L_2 + \frac{3}{2}L_1 \to L_2$ и $L_3 + L_1 \to L_3$. Продолжаем:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(**)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Здесь $(**)$ – это $L_3 - 4L_2 \to L_3$.

Видим, что ранги основной и расширенной матриц совпадают, значит, система совместна. Далее, видно, что $z = -1$. Зная z, находим $y = 3$. Наконец, зная z и y, находим $x = 2$.