Глава V. Линейные операторы

§ 1. Линейный оператор. Матрица оператора

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над одним и тем же полем F. Отображение $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow W$ называется *линейным оператором*, если для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ и любого скаляра $t \in F$ выполняются равенства $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1)$.

Относительно первого равенства говорят, что $\mathcal{A}$ *сохраняет сумму векторов*, относительно второго – что $\mathcal{A}$ *сохраняет произведение вектора на скаляр*. Линейные операторы иначе называют *линейными отображениями*.

Важный специальный случай возникает, когда пространства V и W совпадают, т.е. $W = V$. Тогда говорят, что $\mathcal{A}$ – *линейный оператор на пространстве* V или что $\mathcal{A}$ – *линейный оператор пространства* V. Линейные операторы на V иначе называют *линейными преобразованиями*.

Примеры линейных операторов

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ – обычное двумерное пространство «геометрических» векторов. Зафиксируем в нем систему координат с началом в какой-то точке O и представим каждый вектор из $\mathbb{R}^2$ как направленный отрезок в плоскости Oxy, выходящий из начала координат. Тогда все обычные геометрические преобразования: поворот на любой угол, симметрия относительно любой прямой, проходящей через начало координат (в частности, относительно любой из осей координат), симметрия относительно точки O, проекция на любую из осей координат, гомотетия с произвольным коэффициентом – примеры линейных операторов пространства $\mathbb{R}^2$.

Аналогично, если интерпретировать трехмерное пространство «геометрических» векторов $\mathbb{R}^3$ как множество направленных отрезков, выходящих из начала координат O, то симметрия относительно любой прямой или плоскости, проходящей через точку O, симметрия относительно этой точки, проекция на любую из координатных плоскостей, любой поворот вокруг начала координат или вокруг любой оси – примеры линейных операторов пространства $\mathbb{R}^3$.

Примеры линейных операторов (2)

Пример 2. Зафиксируем произвольный скаляр t и зададим оператор $\mathcal{A}\colon V \longrightarrow V$ следующим правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := t\mathbf{x}$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$. Этот оператор называется *оператором растяжения в t раз*. Линейность оператора растяжения немедленно вытекает из аксиом линейного пространства.

Отметим специальный случай оператора растяжения, который возникает при $t = 1$. Соответствующий оператор обозначается буквой $\mathcal{E}$ и называется *тождественным* или *единичным*. Этот оператор переводит произвольный вектор из V в себя.

Пример 3. Пусть V и W – произвольные векторные пространства над одним и тем же полем F. Отображение, которое сопоставляет каждому вектору $\mathbf{x} \in V$ нулевой вектор $\mathbf{0} \in W$, очевидно, является линейным оператором. Такой оператор называется *нулевым* и обозначается через $\mathcal{O}$.

Пример 4. Пусть $V = M_1 \oplus M_2$ – прямая сумма подпространств M_1 и M_2. Тогда произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Зададим оператор $\mathcal{P}\colon V \longrightarrow V$ правилом $\mathcal{P}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}_1$. Легко проверяется, что этот оператор – линейный. Он называется *оператором проектирования на подпространство* M_1 *параллельно* M_2.

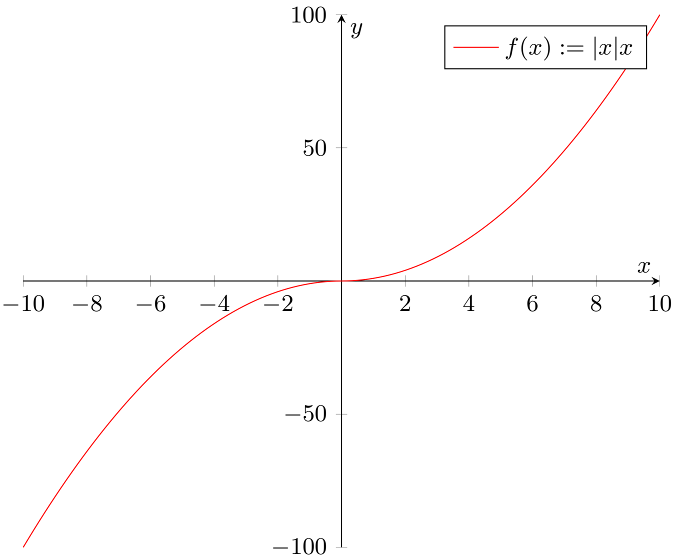
Пример 5. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ определим оператор $\mathcal{D}$ правилом: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Этот оператор называется *оператором дифференцирования*. Из свойств производной вытекает, что этот оператор линеен. Точно так же определяется оператор дифференцирования на пространстве $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени $\leqslant n$ над $\mathbb{R}$.

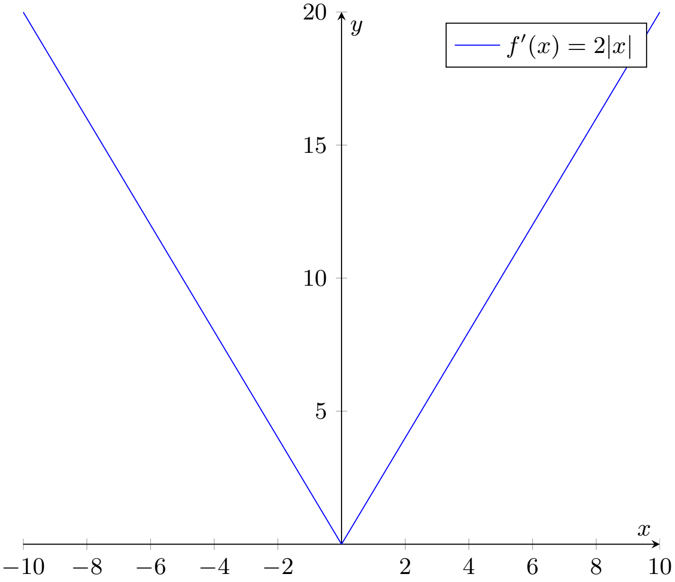
Вопрос: является ли оператор дифференцирования линейным оператором на пространстве всех дифференцируемых функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$?
Нет! Почему? Дело в том, что производная дифференцируемой функции может оказаться недифференцируемой! Простой пример:

$$f(x) := |x|x = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f'(x) = 2|x|$, а функция $2|x|$ не имеет производной при $x = 0$.

Функция





20
15
10
5
y
x
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
$f'(x) = 2|x|$

Пример 5. Пусть F – поле, а A – матрица размера $k \times n$ над F.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Через F_k обозначим пространство столбцов высоты k с элементами из F. Произведением матрицы A на столбец $\mathbf{x} \in F_n$ назовем столбец $A\mathbf{x} \in F_k$, вычисляемый так: если $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, то

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Определим оператор $\mathcal{A}\colon F_n \to F_k$ правилом $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in F_n$. Этот оператор линеен.

Замечание о свойствах линейного оператора

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, а $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор. Тогда:

1) $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2) $\mathcal{A}(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m\mathbf{v}_m) = \lambda_1\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) + \dots + \lambda_m\mathcal{A}(\mathbf{v}_m)$ *для любых векторов* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ *и любых скаляров* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in F$.

Доказательство. Первое свойство вытекает из того, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathcal{A}(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Второе свойство выводится из определения линейного оператора очевидной индукцией по m. $\square$

Теорема существования и единственности линейного оператора

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, причем $\dim V = n > 0$. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ – базис пространства V, а $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, …, $\mathbf{w}_n$ – произвольные вектора из W. Тогда существует единственный линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to W$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Существование. Пусть $\mathbf{x} \in V$, а $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P. Определим оператор $\mathcal{A}\colon V \to W$ правилом: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) := x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$. В силу единственности координат вектора в базисе это определение корректно (т. е. образ вектора $\mathbf{x}$ под действием $\mathcal{A}$ определен однозначно). Из свойств координат суммы векторов и произведения вектора на скаляр вытекает, что этот оператор линеен. Осталось заметить, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ вектор $\mathbf{p}_i$ имеет в базисе P координаты $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте, и потому $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$.

Теорема существования и единственности линейного оператора (2)

Единственность. Пусть $\mathcal{B}\colon V \to W$ – линейный оператор такой, что $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mathbf{x} \in V$, а $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P. Тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n$.
В силу замечания о свойствах линейного оператора имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{x}) &= \mathcal{B}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{B}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{B}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{B}(\mathbf{p}_n) = \\ &= x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n = \mathcal{A}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. $\square$

По доказанной теореме линейный оператор из n-мерного пространства V в какое-то пространство W однозначно определяется тем, как он действует на базисных векторах $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ пространства V.
Если и пространство W конечномерно, то для того, чтобы иметь полную информацию о линейном операторе, достаточно знать координаты образов этих векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в каком-нибудь базисе пространства W.
Собирая эти координаты в прямоугольную таблицу, приходим к понятию *матрицы линейного оператора*.

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, причем $\dim V = n > 0$, $\dim W = k > 0$. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ – базис пространства V, а $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ – базис пространства W. *Матрицей линейного оператора* $\mathcal{A}\colon V \to W$ *в базисах* P и Q называется $k \times n$-матрица, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q, $i = 1, 2, \ldots, n$. Эта матрица обозначается $A_{P,Q}$ или просто A, если базисы зафиксированы.

Итак, если

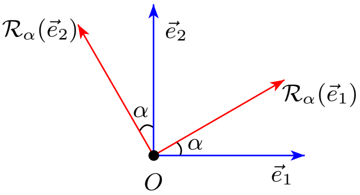
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\mathbf{p}_1) &=& a_{11}\mathbf{q}_1 + a_{21}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k1}\mathbf{q}_k, \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_2) &=& a_{12}\mathbf{q}_1 + a_{22}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k2}\mathbf{q}_k, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) &=& a_{1n}\mathbf{q}_1 + a_{2n}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{q}_k, \end{array}$$

то $A_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{k \times n}$.

Если $W = V$ и $Q = P$, то говорят о *матрице оператора в базисе* P.

Пример: матрица поворота

Вычислим матрицу оператора $\mathcal{R}_\alpha$ поворота плоскости вокруг начала координат на угол α в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ этой плоскости.



Поворот на угол α

Вектор $\mathcal{R}_\alpha(\vec{e}_1)$ имеет в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а вектор $\mathcal{R}_\alpha(\vec{e}_2)$ – координаты $\left(\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha), \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\right) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Следовательно, матрица оператора $\mathcal{R}_\alpha$ имеет вид

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример: матрица дифференцирования

Вычислим матрицу оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ пространстве $\mathbb{R}_3[x]$ всех многочленов степени $\leqslant 3$ над $\mathbb{R}$ в стандартном базисе 1, x, x^2, x^3 этого пространства.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(1) &= \ \ 0 \ \ = 0\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3\\
\mathcal{D}(x) &= \ \ 1 \ \ = 1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3\\
\mathcal{D}(x^2) &= 2x \ = 0\cdot 1+2\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3\\
\mathcal{D}(x^3) &= 3x^2 = 0\cdot 1+0\cdot x+3\cdot x^2+0\cdot x^3
\end{aligned}$$

Видим, что матрица оператора $\mathcal{D}$ равна $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Упражнение: Если рассматривать поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$, то умножение на данное комплексное число z будет линейным оператором на этом пространстве. Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе $1, i$ пространства $\mathbb{C}$.
Указание: запишите число z в тригонометрической форме.

Если V – векторное пространство, $\dim V = n$, P – базис в V, а $\mathbf{x} \in V$, будем обозначать через $[\mathbf{x}]_P$ столбец высоты n, в котором записаны координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P.
Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор и $A_{P,Q} = (a_{ij})$ – его матрица в базисах $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$. Пусть вектор $\mathbf{x} \in V$ имеет координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в базисе P. Как найти координаты вектора $\mathbf{y} := \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе Q? Обозначим эти координаты через $(y_1, y_2, \dots, y_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1\mathbf{q}_1 + y_2\mathbf{q}_2 + \dots + y_k\mathbf{q}_k = \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \dots + x_n\mathbf{p}_n) = \\ &= x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \dots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n). \end{aligned}$$

Поскольку столбцы матрицы $A_{P,Q}$ – это координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$ в базисе Q, выполнены равенства

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathcal{A}(\mathbf{p}_1) & = & a_{11}\mathbf{q}_1 & + & a_{21}\mathbf{q}_2 & + & \cdots & + & a_{k1}\mathbf{q}_k, \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_2) & = & a_{12}\mathbf{q}_1 & + & a_{22}\mathbf{q}_2 & + & \cdots & + & a_{k2}\mathbf{q}_k, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) & = & a_{1n}\mathbf{q}_1 & + & a_{2n}\mathbf{q}_2 & + & \cdots & + & a_{kn}\mathbf{q}_k. \end{array}$$

Нахождение образа вектора с помощью матрицы оператора (2)

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
y_1\mathbf{q}_1 + y_2\mathbf{q}_2 + \cdots + y_k\mathbf{q}_k &= x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n) = \\
&= \ x_1(a_{11}\mathbf{q}_1 + a_{21}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k1}\mathbf{q}_k) \ + \\
&+ \ x_2(a_{12}\mathbf{q}_1 + a_{22}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k2}\mathbf{q}_k) \ + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ x_n(a_{1n}\mathbf{q}_1 + a_{2n}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{q}_k) \ = \\
&= \ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{q}_1 \ + \\
&+ \ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\mathbf{q}_2 \ + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n)\mathbf{q}_k \ .
\end{aligned}
$$

В силу единственности разложения вектора по базису это означает, что

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n.
\end{cases}
$$

Эту систему равенств можно переписать в виде

$$
\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = A_{P,Q} \cdot [\mathbf{x}]_P.
$$

Выводы

$$\left[\mathcal{A}(\mathbf{x})\right]_Q = A_{P,Q} \cdot [\mathbf{x}]_P.$$

Если мы знаем матрицу оператора, мы знаем и то, как действует оператор!

Линейные операторы конечномерных пространств можно (и нужно!) изучать с помощью матриц.

На матрицы можно смотреть как на «координаты» линейных операторов.

Оставшаяся часть параграфа посвящена уточнению этой идеи.

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы из V в W. *Суммой* операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется оператор $\mathcal{S}\colon V \to W$, задаваемый правилом $\mathcal{S}(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Сумма операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначается через $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Множество всех линейных операторов из V в W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Предложение о свойствах суммы операторов

Сумма линейных операторов является линейным оператором. Множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ *с операцией сложения операторов является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t \in F$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y}) = \\ &= \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) + \big(\mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{y})\big) = \mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathcal{S}(\mathbf{y}) \quad \text{и} \\ \mathcal{S}(t\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(t\mathbf{x}) + \mathcal{B}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = t\mathcal{S}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\mathcal{S}$ линеен.

Далее, если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{Hom}(V, W)$, то

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad \text{и}$$
$$\begin{aligned}\big((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}\big)(\mathbf{x}) &= (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) + \mathcal{C}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \big(\mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{C}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + (\mathcal{B}+\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \\ &= \big(\mathcal{A} + (\mathcal{B}+\mathcal{C})\big)(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

откуда $\mathcal{A}+\mathcal{B} = \mathcal{B}+\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C} = \mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$. Нейтральным элементом по сложению является нулевой оператор $\mathcal{O}$, поскольку

$$(\mathcal{A}+\mathcal{O})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

Обратным по сложению элементом к оператору $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ является оператор $-\mathcal{A}$, определяемый правилом $(-\mathcal{A})(\mathbf{x}) := -\mathcal{A}(\mathbf{x})$, поскольку

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}+(-\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + (-\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \big(-\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \mathcal{O}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор, а $t \in F$. *Произведением оператора $\mathcal{A}$ на скаляр t* называется оператор $\mathcal{B}\colon V \to W$, задаваемый правилом $\mathcal{B}(\mathbf{x}) := t\mathcal{A}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Произведение оператора $\mathcal{A}$ на скаляр t обозначается через $t\mathcal{A}$.

Предложение о пространстве линейных операторов

Произведение линейного оператора на скаляр является линейным оператором. Множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ с операциями сложения операторов и умножения оператора на скаляр является векторным пространством.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t, s \in F$. Тогда:

$$(t\mathcal{A})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = t(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \\ = (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (t\mathcal{A})(\mathbf{y}) \text{ и}$$

$$(t\mathcal{A})(s\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(s\mathbf{x})\big) = t\big(s\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big(t\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big((t\mathcal{A})(\mathbf{x})\big).$$

Следовательно, $t\mathcal{A}$ – линейный оператор.

Далее,

$$\big(t(\mathcal{A}+\mathcal{B})\big)(\mathbf{x}) = t\big((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})\big) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = \\ = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (t\mathcal{B})(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = t\mathcal{A}+t\mathcal{B}$;

$$\big((t+s)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}) = (t+s)\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + s\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \\ = (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (s\mathcal{A})(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A}+s\mathcal{A})(\mathbf{x}),$$

т. е. $t\mathcal{A}+s\mathcal{A} = (t+s)\mathcal{A}$;

$$\big(t(s\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) = t\big((s\mathcal{A})(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \big((ts)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(s\mathcal{A}) = (ts)\mathcal{A}$; наконец,

$$(1\cdot\mathcal{A})(\mathbf{x}) = 1\cdot\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

т. е. $1\cdot\mathcal{A} = \mathcal{A}$. С учетом свойств суммы операторов, мы получаем, что в $\mathrm{Hom}(V,W)$ выполнены все аксиомы векторного пространства. $\square$

Теорема о пространствах линейных операторов и матриц

Если V и W – векторные пространства над полем F, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то векторные пространства $Hom(V, W)$ и $F^{k\times n}$ изоморфны.

Доказательство. Зафиксируем в V базис $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$, а в W – базис $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$. Определим отображение $\varphi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to F^{k\times n}$ правилом: если $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейный оператор, то $\varphi(\mathcal{A})$ – матрица оператора A в базисах P и Q. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $t \in F$. Надо проверить, что отображение φ биективно и выполнены равенства

$$\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}) \text{ и } \varphi(t\mathcal{A}) = t\varphi(\mathcal{A}) \qquad (*).$$

В матрице $\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ по столбцам записаны координаты векторов $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q, а в матрицах $\varphi(\mathcal{A})$ и $\varphi(\mathcal{B})$ – координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$ соответственно в том же базисе. Поскольку $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{p}_i) = \mathcal{A}(\mathbf{p}_i) + \mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$, координаты вектора $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ равны сумме координат векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$. Первое из равенств $(*)$ доказано. Второе из них проверяется вполне аналогично.

Проверим, что отображение φ биективно. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ и $\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{B})$, то из определения матрицы линейного оператора вытекает, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинаково действуют на базисных векторах пространства V. Но тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, так как линейный оператор однозначно определяется своим действием на базисных векторах. Следовательно, отображение φ инъективно.

Осталось доказать, что φ сюръективно. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная матрица размера $k \times n$. Для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ положим $\mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{q}_1 + a_{2j}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kj}\mathbf{q}_k$. В силу теоремы существования и единственности линейного оператора существует линейный оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Из определения матрицы оператора вытекает, что $A_{P,Q} = A$, т.е. $\varphi(\mathcal{A}) = A$. Следовательно, отображение φ сюръективно. $\square$

Как отмечалось, размерность пространства матриц размера $k \times n$ равна kn. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

Следствие о размерности пространства линейных операторов

Если V и W – векторные пространства над полем F, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = kn$. $\square$