Тема IV: Векторные пространства

§ 3. Подпространства

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Непустое подмножество M векторного пространства V над полем F называется *подпространством* пространства V, если выполняются следующие условия:

1) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно сложения векторов*);
2) если $\mathbf{x} \in M$, а $t \in F$, то $t\mathbf{x} \in M$ (*замкнутость подпространства относительно умножения вектора на скаляр*).

Пример 1. Пусть V – любое векторное пространство. Очевидно, что все пространство V и множество $\{\mathbf{0}\}$ являются подпространствами в V.

Множество всех подпространств векторного пространства с отношением включения является частично упорядоченным множеством (чумом). Подпространство V является наибольшим элементом этого чума, а подпространство $\{\mathbf{0}\}$ – наименьшим. Первое из этих двух утверждений очевидно, а второе вытекает из следующего замечания.

Замечание о нулевом векторе и подпространствах

Нулевой вектор содержится в любом подпространстве M пространства V.

Доказательство. Если $\mathbf{x}$ – произвольный вектор из M, то, по условию 2) из определения подпространства, $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x} \in M$. □

Пример 2. Пусть V – обычное трёхмерное пространство, а M – множество векторов из V, коллинеарных некоторой плоскости π. Ясно, что сумма двух векторов, коллинеарных π, и произведение вектора, коллинеарного π, на любое число коллинеарны π. Значит, M – подпространство в V. Аналогично доказывается, что подпространством в V является множество векторов, коллинеарных некоторой прямой.

Пример 3. В пространстве строк F^n подпространством будет, например, множество строк, у которых первая компонента равна нулю. Чуть более тонкий пример – множество строк, у которых сумма компонент равна нулю, $M := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.
Оба этих примера – специальные случаи общего (в каком-то смысле универсального) примера, который мы будем обстоятельно изучать.
А именно, рассмотрим произвольную *систему линейных однородных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Тогда множество ее решений – подпространство в пространстве строк F^n.

Пример 4. В пространстве многочленов $F[x]$ подпространством будет множество $F_n[x]$ многочленов степени не выше n.

Пример 5. В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ подпространства образуют, например, все непрерывные функции и все дифференцируемые функции.

Пусть V – произвольное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in V$. Обозначим через M множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, т.е.

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k \text{ и } \mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k$$

для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_k$ и $t_1, t_2, \dots, t_k$. Пусть, далее, t – произвольный скаляр. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k) + (t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k) = \\ &= (s_1 + t_1)\mathbf{a}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (s_k + t_k)\mathbf{a}_k \quad \text{и} \\ t\mathbf{x} &= t(s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k) = (ts_1)\mathbf{a}_1 + (ts_2)\mathbf{a}_2 + \dots + (ts_k)\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

Мы видим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y}, t\mathbf{x} \in M$, т. е. M – подпространство пространства V. Оно называется *подпространством, порождённым векторами* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, или *линейной оболочкой* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, и обозначается через $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$.

Линейная оболочка (2)

Ясно, что если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ – система образующих пространства V, то $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle = V$. Таким образом,

- *любое подпространство конечномерного векторного пространства порождено некоторым конечным набором векторов.*

Замечание о подпространстве, порождённом набором векторов

Пусть V – векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Тогда $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$ – наименьшее подпространство пространства V, содержащее вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. Пусть M – подпространство пространства V, содержащее вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. По определению подпространства любая линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ лежит в M. Следовательно, $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \rangle \subseteq M$. □

Подпространство векторного пространства само является векторным пространством. Это позволяет говорить о размерности и базисе подпространства.

Предложение о размерности подпространства

Пусть M *– подпространство векторного пространства* V*. Тогда* $\dim M \leqslant \dim V$*, причем* $\dim M = \dim V$ *тогда и только тогда, когда* $M = V$*.*

Доказательство. Если M или V – нулевое пространство, то оба утверждения предложения выполняются тривиальным образом. Будем поэтому считать, что M и V – ненулевые пространства. Пусть $\dim M = k$, $\dim V = n$. Неравенство $k \leqslant n$ следует из того, что базис M – это линейно независимая система в V, а любую линейно независимую систему векторов из V можно дополнить до базиса V по теореме о продолжении. При этом для дополнения нужно $n - k$ векторов. Поэтому если $n = k$, то базис M уже является базисом V, т.е. $M = V$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Укажем способ нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов.

Алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов

Запишем координаты данных векторов в некотором фиксированном базисе пространства в матрицу по строкам и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом нашего подпространства, а число этих строк равно его размерности.

Обоснование этого алгоритма будет дано в следующем разделе.

К подпространствам векторного пространства можно применять все теоретико-множественные операции. Но важной для линейной алгебры является только одна из них – операция пересечения подпространств. Как и пересечение любых множеств, пересечение подпространств обозначается символом $\cap$. Введем еще одну важную операцию над подпространствами.

Определение

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. *Сумма подпространств* M_1 и M_2 – это множество $M_1 + M_2$ всех сумм векторов из M_1 с векторами из M_2:

$$M_1 + M_2 := \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \mathbf{x}_1 \in M_1,\ \mathbf{x}_2 \in M_2\}.$$

Замечание о сумме и пересечении подпространств

Если M_1 и M_2 – подпространства пространства V, то $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ также являются подпространствами в V.

Доказательство. В силу замечания о нулевом векторе и подпространствах, каждое из подпространств M_1 и M_2 содержит нулевой вектор. Следовательно, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in M_1 + M_2$ и $\mathbf{0} \in M_1 \cap M_2$. В частности, множества $M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2$ – непустые.

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 + M_2$ и t – скаляр. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ для некоторых $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2 \in M_2$. Учитывая, что M_1 и M_2 – подпространства, получаем, что

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2) \in M_1 + M_2,$$
$$t\mathbf{x} = t(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = t\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 \in M_1 + M_2.$$

Итак, $M_1 + M_2$ – подпространство в V. Далее, пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$ и t – скаляр. Тогда $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_1$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_2$. Раз M_1 и M_2 – подпространства, имеем $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_1$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_2$, $t\mathbf{x} \in M_1$ и $t\mathbf{x} \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$ и $t\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$, т.е. $M_1 \cap M_2$ – подпространство в V. $\square$

Замечание о сумме подпространств

Если M_1 и M_2 – подпространства пространства V, то $M_1 + M_2$ – наименьшее подпространство в V, содержащее M_1 и M_2.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \in M_1$, то $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$, поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0}$ и $\mathbf{0} \in M_2$. Следовательно, $M_1 \subseteq M_1 + M_2$. Аналогично, $M_2 \subseteq M_1 + M_2$. Пусть теперь подпространство M содержит и M_1, и M_2, и $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ для некоторых $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 \in M$ и $\mathbf{x}_2 \in M$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M$. Итак, $M_1 + M_2 \subseteq M$. $\square$

Операцию пересечения множеств можно применять к любому (в том числе бесконечному) числу множеств. Поэтому можно говорить о пересечении любого (в том числе бесконечного) набора подпространств данного векторного пространства. Операцию суммы подпространств также можно применять к любому набору подпространств. Если $M_1, M_2, \dots, M_k$ – подпространства векторного пространства V и $k > 2$, то по индукции положим

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_k := (M_1 + M_2 + \cdots + M_{k-1}) + M_k.$$

При этом скобки в левой части равенства можно не ставить, поскольку операция сложения двух подпространств, очевидно, ассоциативна.

Придумайте, как определить сумму бесконечного набора подпространств.

Теорема о размерности суммы и пересечения подпространств

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. Тогда размерность суммы подпространств M_1 и M_2 равна сумме размерностей этих подпространств минус размерность их пересечения.

Доказательство. Из предложения о размерности подпространства $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_1$ и $\dim(M_1 \cap M_2) \leqslant \dim M_2$. Положим

$$\dim(M_1 \cap M_2) = k, \ \ \dim M_1 = k + \ell \text{ и } \dim M_2 = k + m.$$

Если $M_1 = \{\mathbf{0}\}$, то, очевидно, $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\dim M_1 = \dim(M_1 \cap M_2) = 0$, $M_1 + M_2 = M_2$ и потому

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_2 = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Аналогично разбирается случай, когда $M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Итак, далее можно считать, что пространства M_1 и M_2 – ненулевые, и, в частности, каждое из них имеет базис.Будем также считать, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ (в противном случае следует во всех дальнейших рассуждениях заменить базис пространства $M_1 \cap M_2$ на пустой набор векторов; рассуждения при этом только упростятся). Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ – базис пространства $M_1 \cap M_2$.

Размерность суммы подпространств (2)

По теореме о продолжении $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ можно дополнить как до базиса M_1, так и до базиса M_2. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ – базис M_1, а $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ – базис M_2. Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m \tag{1}$$

является базисом пространства $M_1 + M_2$. Этого достаточно для доказательства теоремы, так как число векторов в этом наборе равно

$$k + \ell + m = (k + \ell) + (k + m) - k = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 \cap M_2).$$

Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Ясно, что $\mathbf{x}_1$ – линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$, а $\mathbf{x}_2$ – линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$. Отсюда вектор $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ есть линейная комбинация векторов (1). Таким образом, (1) – система образующих пространства $M_1 + M_2$. Остается доказать, что эта система векторов линейно независима. Предположим, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \cdots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell, r_1, r_2, \ldots, r_m$. Требуется доказать, что все эти скаляры равны 0.

Положим $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$. Очевидно, что $\mathbf{y} \in M_1$. С другой стороны, из (2) вытекает, что

$$\mathbf{y} = -t_1\mathbf{a}_1 - t_2\mathbf{a}_2 - \cdots - t_k\mathbf{a}_k - r_1\mathbf{c}_1 - r_2\mathbf{c}_2 - \cdots - r_m\mathbf{c}_m \in M_2.$$

Следовательно, $\mathbf{y} \in M_1 \cap M_2$. Тогда $\mathbf{y}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Таким образом, существуют скаляры $q_1, q_2, \ldots, q_k$ такие, что $\mathbf{y} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell = q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k$. Следовательно,

$$q_1\mathbf{a}_1 + q_2\mathbf{a}_2 + \cdots + q_k\mathbf{a}_k - s_1\mathbf{b}_1 - s_2\mathbf{b}_2 - \cdots - s_\ell\mathbf{b}_\ell = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Поскольку вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b}_\ell$ образуют базис пространства M_1, они линейно независимы. Поэтому линейная комбинация в левой части (3) тривиальна. В частности, $s_1 = s_2 = \cdots = s_\ell = 0$. Следовательно, равенство (2) принимает вид

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + r_1\mathbf{c}_1 + r_2\mathbf{c}_2 + \cdots + r_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0}.$$

Учитывая, что вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_m$ образуют базис пространства M_2 (и, в частности, линейно независимы), мы получаем, что $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$. Итак, все коэффициенты в левой части равенства (2) равны 0, что и требовалось доказать. $\square$

Алгоритм нахождения базиса и размерности суммы подпространств

Учитывая алгоритм нахождения базиса и размерности подпространства, порождённого данным набором векторов, получаем

Алгоритм нахождения базиса и размерности суммы подпространств

Пусть даны базисы подпространств M_1 и M_2. Запишем в матрицу по строкам координаты векторов, входящих в эти базисы, в некотором фиксированном базисе пространства и приведем эту матрицу к ступенчатому виду. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом суммы подпространств M_1 и M_2, а число этих строк равно ее размерности.

Отметим, что, найдя размерность суммы подпространств M_1 и M_2, мы сможем найти и размерность их пересечения, так как, в силу теоремы о размерности суммы и пересечения,

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 - \dim(M_1 + M_2).$$

Базис пересечения ищется несколько сложнее. Способ решения этой задачи будет указан в следующем разделе.

Прямая сумма

Определение

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. Говорят, что сумма подпространств M_1 и M_2 является их *прямой суммой*, если $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Прямая сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается через $M_1 \oplus M_2$ или $M_1 \dotplus M_2$.

Из доказательства теоремы о размерности суммы и пересечения подпространств вытекает

Замечание о базисе прямой суммы подпространств

Если $V = M_1 \oplus M_2$, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ *– базис* M_1, *а* $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ *– базис* M_2, *то* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_m$ *– базис пространства* V. $\square$

Прямая сумма (2)

Теорема о прямой сумме подпространств

Пусть V – векторное пространство, а M_1 и M_2 – его подпространства. Следующие условия эквивалентны:

1) $M_1 + M_2$ *является прямой суммой подпространств* M_1 *и* M_2*;*
2) $\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$*;*
3) *любой вектор из* $M_1 + M_2$ *единственным образом представим в виде суммы вектора из* M_1 *и вектора из* M_2*;*
4) *нулевой вектор пространства* V *единственным образом представим в виде суммы вектора из* M_1 *и вектора из* M_2*.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из теоремы о размерности суммы и пересечения и того факта, что размерность нулевого пространства равна 0. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна. Поэтому достаточно доказать импликации 1) $\Longrightarrow$ 3) и 4) $\Longrightarrow$ 1).

1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $\mathbf{x} \in M_1 + M_2$. По определению суммы подпространств $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$. Остается доказать, что такое представление вектора $\mathbf{x}$ единственно. Предположим, что $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, где $\mathbf{y}_1 \in M_1$ и $\mathbf{y}_2 \in M_2$. Из равенств $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ имеем $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2$. Ясно, что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 \in M_1$, а $\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_2$. Следовательно, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 \in M_1 \cap M_2$. Но $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$.

4) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что $M_1 \cap M_2 \neq \{\mathbf{0}\}$, т. е. существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in M_1 \cap M_2$. Тогда вектор $\mathbf{0}$ может быть двумя различными способами представлен в виде суммы вектора из M_1 и вектора из M_2: $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$ и $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Мы получили противоречие с условием 4). $\square$

При решении задач полезно иметь в виду следующее

Замечание о прямой сумме подпространств

$V = M_1 \oplus M_2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 = \dim V.$$

Необходимость сразу следует из теоремы о прямой сумме подпространств. *Достаточность* следует из теоремы о размерности сумм и пересечения. $\square$

Определение

Пусть $V = M_1 \oplus M_2$ и $\mathbf{x} \in V$. В силу теоремы о прямой сумме подпространств существуют однозначно определенные векторы $\mathbf{x}_1 \in M_1$ и $\mathbf{x}_2 \in M_2$ такие, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Вектор $\mathbf{x}_1$ называется *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* M_1 *параллельно* M_2, а вектор $\mathbf{x}_2$ – *проекцией* $\mathbf{x}$ *на* M_2 *параллельно* M_1.

⚠ Не путать с проекцией вектора на ось!

Алгоритм нахождения проекции вектора на подпространство

Пусть $V = M_1 \oplus M_2$ и $\mathbf{x} \in V$. Предположим, что нам известны базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ подпространства M_1 и базис $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ подпространства M_2. В силу замечания о базисе прямой суммы подпространств $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_\ell$ – базис пространства V. Найдем координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. Пусть они имеют вид $(t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1, s_2, \ldots, s_\ell)$. Тогда $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ – проекция $\mathbf{x}$ на M_1 параллельно M_2, а $s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$ – проекция $\mathbf{x}$ на M_2 параллельно M_1.

Обоснование алгоритма очевидно: если $\mathbf{y} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{z} = s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_\ell\mathbf{b}_\ell$, то $\mathbf{y} \in M_1$, $\mathbf{z} \in M_2$ и $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$.

Определение

Пусть V – векторное пространство, $\mathbf{x}_0 \in V$, а M – подпространство в V. Множество всех векторов вида $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in M$, называется *линейным многообразием* в V и обозначается через $\mathbf{x}_0 + M$. Вектор $\mathbf{x}_0$ называется *начальным вектором* многообразия $\mathbf{x}_0 + M$, а подпространство M – *направляющим подпространством* этого многообразия. Размерность подпространства M называется размерностью многообразия $\mathbf{x}_0 + M$.

Пример 1. Если $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_0 + M = M$. Таким образом, всякое подпространство пространства V является линейным многообразием в V.

Пример 2. Если $M = \{\mathbf{0}\}$, то $\mathbf{x}_0 + M = \{\mathbf{x}_0\}$. Таким образом, всякий вектор из V является линейным многообразием в V (размерности 0).

Пример 3. Обычные прямые и плоскости трехмерного пространства – линейные многообразия.

С помощью понятия линейного многообразия геометрия обычных прямых и плоскостей поднимается в пространства с любым числом измерений.