# Тема IV: Векторные пространства

# § 1. Линейная зависимость и независимость векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

## Определения

Пусть $F$ – произвольное поле. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* над полем $F$ называется произвольное непустое множество $V$, на котором заданы бинарная операция сложения и для каждого элемента $t \in F$ унарная операция умножения на $t$, удовлетворяющие следующим *аксиомами векторного пространства*:

1) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (сложение *коммутативно*);
2) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (сложение *ассоциативно*);
3) $\exists \mathbf{0} \in V \;\; \forall \mathbf{x} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ (существование *нуля*);
4) $\forall \mathbf{x} \in V \;\; \exists \mathbf{y} \in V \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$ (существование *противоположного*);
5) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \;\; \forall t \in F \quad t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y}$;
6) $\forall \mathbf{x} \in V \;\; \forall t, s \in F \quad (t + s)\mathbf{x} = t\mathbf{x} + s\mathbf{x}$;
7) $\forall \mathbf{x} \in V \;\; \forall t, s \in F \quad t(s\mathbf{x}) = (ts)\mathbf{x}$;
8) $\forall \mathbf{x} \in V \quad 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Элементы множества $V$ называются *векторами*. Поле $F$ называют *основным* полем, а его элементы иногда называют *скалярами*.

Как показывают аксиомы 1)–4), относительно сложения любое векторное пространство – абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Он единствен: если вектора $\mathbf{0}_1$ и $\mathbf{0}_2$ удовлетворяют аксиоме 3), то

$$\mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 \overset{1)}{=} \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 \overset{3)}{=} \mathbf{0}_2.$$

Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{x}$, также единствен. Если вектора $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ удовлетворяют $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, то

$$\mathbf{y} \overset{3)}{=} \mathbf{y} + \mathbf{0} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} + \mathbf{z}) \overset{2)}{=} (\mathbf{y} + \mathbf{x}) + \mathbf{z} \overset{1)}{=} \mathbf{z} + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z} + \mathbf{0} \overset{3)}{=} \mathbf{z}.$$

Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{x}$, обозначается через $-\mathbf{x}$.

*Вычитание векторов* определяется так: $\mathbf{y} - \mathbf{x} := \mathbf{y} + (-\mathbf{x})$.

Пример 1. Пусть $V$ – множество всех обычных («геометрических») векторов трехмерного физического пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на (действительное) число. Все аксиомы векторного пространства в этом случае выполнены; в частности, роль нулевого вектора **0** играет вектор $\vec{0}$. Поэтому $V$ является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Векторным пространством над $\mathbb{R}$ будет также множество всех векторов (в обычном смысле этого слова), коллинеарных некоторой плоскости или некоторой прямой.

- Таким образом, свойства векторов в векторном пространстве являются обобщением свойств обычных, «геометрических» векторов. Именно этим и объясняется и термин «векторное пространство», и использование термина «вектор» применительно к элементам произвольного векторного пространства.

Пример 2. Пусть $F$ – произвольное поле, а $n$ – произвольное натуральное число. Обозначим через $F^n$ множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$. На множестве $F^n$ введем операции сложения и умножения на скаляр. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F^n$, а $t \in F$. Положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \text{и} \quad t\mathbf{x} := (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n).$$

Легко проверяется, что множество $F^n$ с такими операциями является векторным пространством (роль нулевого вектора играет $\mathbf{0} := (0, 0, \ldots, 0)$). Это пространство называют *пространством строк длины $n$ над полем $F$* или просто *пространством строк*. Мы вскоре увидим, что оно играет особую роль в теории векторных пространств.

- Пространство $F^1$, т.е. множество всех последовательностей вида $(x_1)$, где $x_1 \in F$, естественно отождествить с полем $F$. Итак, любое поле можно рассматривать как векторное пространство над самим собой. Нулевым вектором этого пространства является нуль поля.

При $n = 1, 2, 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору $\vec{x}$ из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел $(x_1, x_2, x_3)$ – координат вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.
Эта тройка чисел является элементом пространства $\mathbb{R}^3$. Отображение $f$ из обычного трехмерного пространства в пространство $\mathbb{R}^3$, заданное правилом $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$, является *изоморфизмом*, т.е. оно взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения на действительное число:

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \quad \text{и} \quad f(t\vec{x}) = tf(\vec{x})$$

для всех векторов $\vec{x}, \vec{y}$ и всех скаляров $t \in \mathbb{R}$.

Таким образом,

!! *пространство $\mathbb{R}^3$ изоморфно обычному («физическому») трехмерному пространству.*
*Аналогично, пространство $\mathbb{R}^2$ изоморфно плоскости, а пространство $\mathbb{R}^1$ – прямой в обычном трехмерном пространстве.*

Пример 3. Рассмотрим множество $F[x]$ всех многочленов от переменной $x$ над полем $F$,

$$F[x] := \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 : a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in F\}.$$

Оно будет векторным пространством относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочлена на скаляр. Все аксиомы векторного пространства легко проверяются (роль нулевого вектора при этом играет многочлен $0$). Таким образом, множество $F[x]$ является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Для всякого натурального $n$ обозначим через $F_n[x]$ множество всех многочленов степени $\leqslant n$ над полем $F$. Ясно, что $F_n[x]$ также будет векторным пространством относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляры из $F$.

Пример 4. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если $f$ и $g$ – две функции, а $t \in \mathbb{R}$, то $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ и $(tf)(x) := t \cdot f(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются (в качестве нулевого вектора выступает функция, значение которой при любом $x$ равно 0). Это векторное пространство называется *пространством функций*.

Пример 5. Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел относительно операций сложения комплексных чисел и умножения комплексного числа на действительное. Все аксиомы векторного пространства сразу следуют из аксиом поля.

Пусть $F$ – поле, а $k$ и $n$ – натуральные числа. *Матрица размера* $k \times n$ над $F$ – это прямоугольная таблица с $k$ строками и $n$ столбцами, заполненная элементами из $F$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{k \times n}.$$

Такие матрицы складывают и умножают на элементы из $F$ покомпонентно:

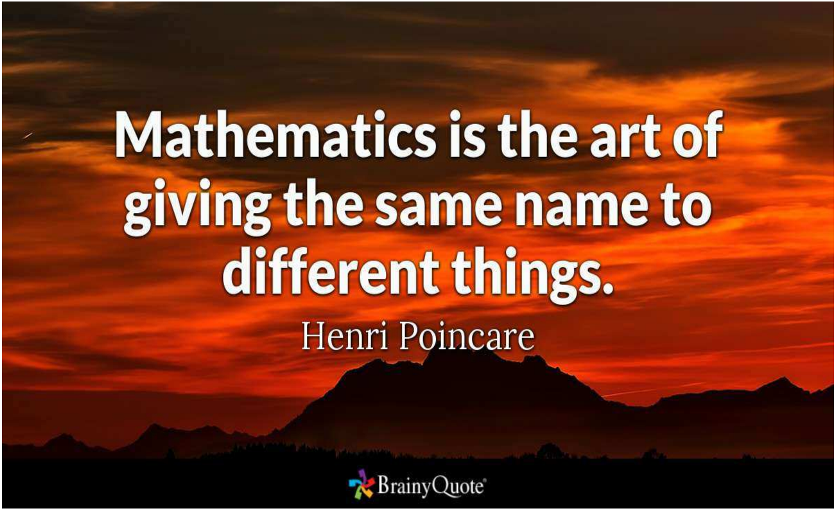
$$(a_{ij})_{k\times n} + (b_{ij})_{k\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{k\times n}, \quad t(a_{ij})_{k\times n} := (ta_{ij})_{k\times n}.$$

Пример 6. Множество $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над $F$ является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матриц на скаляры из $F$. Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $k \times n$.

Отметим, что пространство строк $F^n$ из примера 2 является специальным случаем пространства матриц $F^{k\times n}$ при $k = 1$.

# Примеры: нулевое пространство

Пример 7. Пусть $V$ – произвольное множество, состоящее из одного элемента **a**. Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр в таком множестве вводятся просто: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $t \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого $t$. Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются. Таким образом, $V$ можно рассматривать как векторное пространство. При этом его единственный элемент **a** будет нулевым вектором. Такое пространство называется *нулевым*.


Mathematics is the art of giving the same name to different things.
Henri Poincare
BrainyQuote

$\nabla 1$ $t\mathbf{0} = \mathbf{0}$ для любого скаляра $t \in F$.
*Доказательство*. Умножив обе части равенства $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$ на $t$, получим $t\mathbf{0} = t(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = t\mathbf{0} + t\mathbf{0}$. Добавляя $-t\mathbf{0}$ к обеим частям, имеем $\mathbf{0} = t\mathbf{0}$. □

$\nabla 2$ $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$.
*Доказательство.* Имеем $0\mathbf{x} + 0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$. Добавляя $-0\mathbf{x}$ к обеим частям, получаем $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

$\nabla 3$ Если $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то либо $t = 0$, либо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
*Доказательство.* Пусть $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. Тогда имеем

$$\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = (t^{-1}t)\mathbf{x} = t^{-1}(t\mathbf{x}) = t^{-1}\mathbf{0} \stackrel{\nabla 1}{=} \mathbf{0}.$$

□

$\nabla 4$ $(-t)\mathbf{x} = -t\mathbf{x}$ для всех $t \in F$ и $\mathbf{x} \in V$.
*Доказательство.* Имеем

$$(-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x} = ((-t) + t)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} \stackrel{\nabla 2}{=} \mathbf{0}.$$

Добавляя $-t\mathbf{x}$ к обеим частям, имеем $(-t)\mathbf{x} = -t\mathbf{x}$. □

Следующие понятия будут играть ключевую роль.

## Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ – система векторов из векторного пространства $V$ над полем $F$, а $t_1, t_2, \ldots, t_k \in F$. Вектор вида

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k \tag{1}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы один из скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k$ отличен от 0. Если вектор **b** является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, говорят, что **b** *линейно выражается* через вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы*, если некоторая нетривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, и *линейно независимы* в противном случае, т.е. если никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору.

Для геометрических векторов введенное только что понятие линейной зависимости сводится к знакомым нам понятиям.

**Замечание о линейной зависимости на плоскости и в пространстве**

а) *Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

б) *Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

*Доказательство.* а) Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то $p\vec{a}+q\vec{b}=\vec{0}$ для некоторых скаляров $p$ и $q$, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p\neq 0$. Тогда $\vec{a}=-\frac{q}{p}\cdot\vec{b}$, откуда $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Предположим теперь, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{b}=\vec{0}$, то $0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}=\vec{0}$. Если же $\vec{b}\neq\vec{0}$, то по критерию коллинеарности $\vec{a}=t\vec{b}$ для некоторого $t$, т.е. $1\cdot\vec{a}-t\vec{b}=\vec{0}$. В обоих случаях имеем нетривиальную линейную комбинацию, равную $\vec{0}$, что и означает, что вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

б) Если вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, то $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ для некоторых скаляров $p$, $q$ и $r$, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b} - \frac{r}{p} \cdot \vec{c}$. Это значит, что вектор $\vec{a}$ лежит в той плоскости, которой принадлежат вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и потому вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Предположим теперь, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \parallel \vec{c}$, то по критерию коллинеарности векторов $\vec{b} = t\vec{c}$ для некоторого $t$, и потому $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Наконец, если $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, то вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис той плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c}$ для некоторых скаляров $s$ и $t$, откуда $1 \cdot \vec{a} - s\vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Во всех трех случаях имеем нетривиальную линейную комбинацию, равную $\vec{0}$, что и означает, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. $\square$

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве $F^n$, которая будет многократно возникать в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

**1-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$**

*Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.*

*Доказательство.* Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. $\square$

В процессе доказательства этого замечания фактически доказано следующее полезное для дальнейшего утверждение.

**2-е замечание о векторах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$**

*Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольный вектор пространства $F^n$, то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$.*

# Примеры линейно независимых систем многочленов и функций

В пространстве многочленов $F[x]$ для любого целого неотрицательного $n$ многочлены $1, x, x^2, \ldots, x^n$ образуют линейно независимую систему. Действительно, из равенства $a_0 \cdot 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$, следует, что $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, ведь нуль в пространстве многочленов – это многочлен, у которого все коэффициенты нулевые.

В пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ линейно независимы, например, функции $\sin x$ и $\cos x$. Действительно, если $a \sin x + b \cos x = 0$, то положив $x := \frac{\pi}{2}$, получим $a = 0$, а положив $x := 0$, получим $b = 0$.

На самом деле, в пространстве функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ для любого положительного $n$ функции $\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$ образуют линейно независимую систему, но доказать это элементарными средствами трудно.

# Пример линейно независимой системы матриц

В пространстве $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над полем $F$ линейно независимую систему образуют *матричные единицы*, т.е. матрицы, у которых ровно один элемент равен 1, а все прочие элементы равны 0:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{0} & \phantom{\dots} & j & \phantom{\dots} & \phantom{0} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} =: E_{ij}.$$

Действительно, легко понять, что $\sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = (a_{ij})_{k\times n}$, и если $(a_{ij})_{k\times n}$ – нулевая $k\times n$-матрица, то $a_{ij} = 0$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $j = 1, \dots, n$.

Система матричных единиц, конечно, есть прямое обобщение линейно независимой системы

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

в пространстве строк $F^n$.

# Еще примеры: пространство комплексных чисел и нулевое пространство

В поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, рассматриваемом как векторное пространство над $\mathbb{R}$, линейно независимы, например, числа $1$ и $i$.
А вот в нулевом пространстве линейно независимых систем нет.
На самом деле, верно более общее наблюдение:

**Лемма о системе векторов, содержащей нулевой вектор**

*Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ имеется нулевой вектор, то эти вектора линейно зависимы.*

*Доказательство.* Пусть $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

□

**Лемма о надсистеме линейно зависимой системы векторов**

*Если к линейно зависимой системе* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.*

*Доказательство.* Пусть $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m$ – нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, равная нулевому вектору. Если добавить к этим векторам вектора $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$, то

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

**Следствие о подсистеме линейно независимой системы векторов**

*Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.*

Итак, свойство «быть линейно зависимой» наследуется «вверх», т.е. переносится на надсистемы, а свойство «быть линейно независимой» наследуется «вниз», т.е. переносится на подсистемы.

**Признак линейной зависимости**

*Вектора* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно зависимы, если один из них линейно выражается через остальные.*

*Доказательство.* Если вектор $\mathbf{a}_i$ линейно выражается через остальные, т. е. $\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + r_k\mathbf{a}_k$ для некоторых скаляров $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k$, то

$$r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - 1 \cdot \mathbf{a}_i + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

и потому вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

## Лемма о правом крайнем

*Если система ненулевых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима, то в ней найдется вектор, который линейно выражается через предыдущие.*

*Доказательство.* По условию существуют скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_k$, по крайней мере один из которых не равен 0, такие, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

Пусть $j$ – наибольший индекс, для которого $t_j \neq 0$. Если $j = 1$, то равенство $(*)$ сводится к $t_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, откуда $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, противоречие. Итак, $j > 1$. Равенство $(*)$ дает

$$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_{j-1}\mathbf{a}_{j-1} + t_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}.$$

Перенося последнее слагаемое в другую часть и деля на $t_j \neq 0$, получаем

$$\mathbf{a}_j = -\frac{t_1}{t_j} \cdot \mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{t_{j-1}}{t_j} \cdot \mathbf{a}_{j-1}. \qquad \square$$