

# Тема III: Комплексные числа

## § 3. Комплексные числа в тригонометрической форме

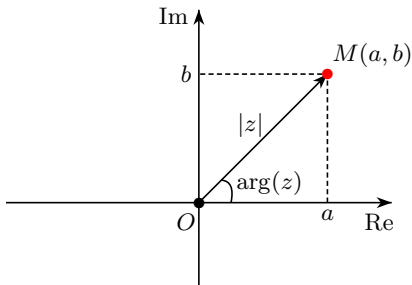
Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

## Определение

Пусть комплексное число  $z = a + bi$  изображается на плоскости точкой  $M(a, b)$  (см. рисунок). Длина отрезка  $OM$  называется **модулем** числа  $z$ . Если  $z \neq 0$ , то угол между положительным направлением действительной оси и отрезком  $OM$  называется **аргументом** числа  $z$ . У числа  $0$  аргумент не определен. Модуль комплексного числа  $z$  обозначается через  $|z|$ , а аргумент – через  $\arg(z)$ . Имеем  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .



Модуль и аргумент комплексного числа

- 1 Для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает со стандартным понятием модуля (абсолютной величины). В самом деле, если  $z = a + 0 \cdot i$ , то  $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ .
- 2 Аргумент ненулевого комплексного числа определен неоднозначно: если  $\varphi$  – аргумент числа  $a + bi$ , то  $\varphi + 2\pi k$  – также его аргумент при любом целом  $k$ . Такое соглашение принимается, чтобы при непрерывном движении точки по комплексной плоскости ее аргумент изменялся непрерывно.

## Свойства модуля комплексного числа

Если  $x$  и  $y$  – произвольные комплексные числа, то:

- 1)  $|x| = |\bar{x}|$ ;
- 2)  $x \cdot \bar{x} = |x|^2$ ;
- 3)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

*Доказательство.* 1), 2) Пусть  $x = a + bi$ . Тогда

$$|\bar{x}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |x| \text{ и}$$
$$x \cdot \bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |x|^2.$$

3) Обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$  точки на плоскости, отвечающие числам  $x$ ,  $y$  и  $x + y$  соответственно при геометрической интерпретации комплексных чисел. Если точки  $A$ ,  $B$ ,  $O$  не лежат на одной прямой (левый рисунок на следующем слайде), то, поскольку длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон, имеем

$$|x + y| = |OC| < |OA| + |AC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

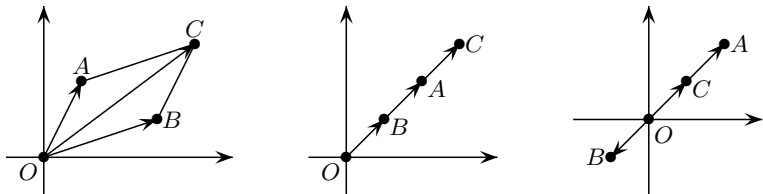
## Свойства модуля комплексного числа (2)

Пусть теперь точки  $A$ ,  $B$  и  $O$  лежат на одной прямой. Если  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от точки  $O$  (см. центральный рисунок), то, очевидно,

$$|x + y| = |OC| = |OA| + |OB| = |x| + |y|.$$

Пусть точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от точки  $O$  (см. правый рисунок). Без ограничения общности можно считать, что  $|x| \geq |y|$ . Тогда точка  $C$  принадлежит отрезку  $OA$ , и потому

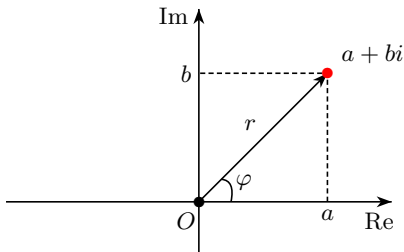
$$|x + y| = |OC| \leq |OA| = |x| \leq |x| + |y|.$$



Модуль суммы комплексных чисел

Пусть  $r$  – модуль, а  $\varphi$  – аргумент комплексного числа  $a + bi \neq 0$ .

Имеем  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  и  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , см. рисунок.



Следовательно,

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot i \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

## Определение

Если  $r$  – модуль, а  $\varphi$  – аргумент комплексного числа  $a + bi$ , то запись  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется **тригонометрической формой** этого числа.

- 1 Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно – это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.
- 2 Число 0 не имеет тригонометрической формы, так как у него не определен аргумент.

## Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. В самом деле, пусть  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\&= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\&= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\&= \frac{r_1 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2))}{r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\&= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).\end{aligned}$$

Мы видим, что:

- *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов;*
- *модуль частного от деления  $z_1$  на  $z_2$  равен частному от деления модуля  $z_1$  на модуль  $z_2$ , а аргумент частного – разности аргументов  $z_1$  и  $z_2$ .*



## Возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Из результата о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме по индукции легко вывести, что

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1)$$

для любого натурального  $n$ . Таким образом,

- *при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

Из формулы (1) при  $r = 1$  получается равенство

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

известное как *формула Муавра*.

Комбинация формулы Муавра и формулы бинома Ньютона – неисчерпаемый источник комбинаторных и тригонометрических тождеств. Для примера выведем формулы, выражающие  $\sin 5\varphi$  и  $\cos 5\varphi$  через  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$ . Имеем

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 &= \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi + 10i^2 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + \\ &+ 10i^3 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5i^4 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i^5 \sin^5 \varphi = \\ &= \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - \\ &- 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi = \\ &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + \\ &+ (5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi)i.\end{aligned}$$

С другой стороны, из формулы Муавра при  $n = 5$  вытекает, что  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi \quad \text{и} \\ \sin 5\varphi &= 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi.\end{aligned}$$

Перейдем к вопросу об извлечении корней из комплексных чисел.

## Определение

Пусть  $n$  – натуральное число. *Корнем степени  $n$  из комплексного числа  $z$*  называется комплексное число  $w$  такое, что  $w^n = z$ .

Из определения не вытекает, что корень  $n$ -й степени из  $z$  существует. Тем более не ясно, сколько значений может он принимать, если существует.

Вспомним, как обстоит дело в поле  $\mathbb{R}$ . Корень  $n$ -й степени из  $x \in \mathbb{R}$ :

- существует и определен однозначно, если либо  $n$  нечетно, либо  $x = 0$  (в последнем случае корень равен 0 независимо от  $n$ );
- существует и имеет ровно два (противоположных по знаку) значения, если  $n$  четно и  $x > 0$ ;
- не существует, если  $n$  четно и  $x < 0$ .

В поле  $\mathbb{C}$  все намного проще. Если  $z = 0$ , то, очевидно, для любого натурального  $n$  корень  $n$ -й степени из  $z$  в поле  $\mathbb{C}$  существует и определен однозначно (а именно, равен 0). Если же  $z \neq 0$ , то, как мы сейчас докажем, для любого натурального  $n$  корень  $n$ -й степени из  $z$  в  $\mathbb{C}$  существует и имеет ровно  $n$  различных значений.

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = q(\cos \psi + i \sin \psi)$  и  $w^n = z$ . Тогда

$$q^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Получаем равенства  $q^n = r$  и  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , где  $k$  – некоторое целое число. Поскольку  $q$  и  $r$  – положительные действительные числа, это означает, что  $q = \sqrt[n]{r}$ . Для аргумента числа  $w$  справедливо равенство  $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ . В частности, мы видим, что корень  $n$ -й степени из числа  $z$  всегда существует.

Выясним теперь, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Все корни  $n$ -й степени из числа  $z$  задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (2)$$

где  $k$  – целое число. Ясно, что  $w_k = w_\ell$  тогда и только тогда, когда  $\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi \ell}{n} + 2\pi m$  при некотором целом  $m$ . Последнее равенство равносильно равенству  $\frac{k - \ell}{n} = m$ . Иными словами, числа  $w_k$  и  $w_\ell$  совпадают тогда и только тогда, когда  $k$  и  $\ell$  имеют одинаковые остатки при делении на  $n$ . Поэтому все различные значения корня получаются по формуле (2) при  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Таким образом,

- если  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – произвольное комплексное число, отличное от 0, а  $n$  – произвольное натуральное число, то корень  $n$ -й степени из  $z$  имеет ровно  $n$  различных значений, которые могут быть вычислены по формуле

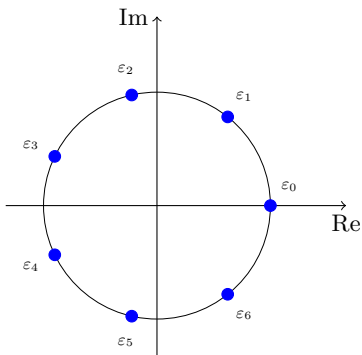
$$\sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (3)$$

Отдельно выделим случай **корней из единицы**. Если  $z = 1$ , то  $|z| = 1$ , а  $\arg z = 0$ . Подставляя эти данные в (3), получаем следующий факт:

- корень  $n$ -й степени из 1 имеет ровно  $n$  различных значений  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ , которые могут быть вычислены по формуле

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Корни  $n$ -й степени из 1 располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, вписанного в *единичную окружность*  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .



Корни 7-й степени из 1

Корни  $n$ -й степени из 1:

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

- ❶ Произведение и частное двух корней  $n$ -й степени из 1 – снова корень  $n$ -й степени из 1. (Корни  $n$ -й степени из 1 образуют *группу*.)
- ❷ Все корни  $n$ -й степени из 1 суть степени корня  $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ .
- ❸ Сумма всех корней  $n$ -й степени из 1 равна 0.

Свойства 1 и 2 понятны; докажем свойство 3.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_1^k = \frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = \frac{1 - 1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$$

Вспомним проблему, приведшую к необходимости рассмотрения комплексных чисел. Решая уравнение  $x^3 - x = 0$  (корни которого, очевидно, суть  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -1$ ) по формуле Кардано

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

мы пришли к выражению

$$\sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}.$$

Теперь мы можем разобраться со смыслом этого выражения. Имеем

$$\sqrt{-\frac{1}{27}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}i = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

Извлечем из числа  $\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$  кубический корень.



Три значения кубического корня из

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{9\pi}{2} + i \sin \frac{9\pi}{2}):$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6}) = -i \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично, три значения кубического корня из  $-\sqrt{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}i =$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{7\pi}{2} + i \sin \frac{7\pi}{2}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{11\pi}{2} + i \sin \frac{11\pi}{2}):$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{3\pi}{6} + i \sin \frac{3\pi}{6}) = i \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Итак, имеем три значения для  $u$  и три значения для  $v$ :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, & v_1 &= i\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ u_2 &= -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}, & v_2 &= -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ u_3 &= -i\frac{1}{\sqrt{3}}, & v_3 &= \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Какие из них нужно скомбинировать, чтобы получить решение исходного уравнения  $x^3 - x = 0$ ? Вспомним: при выводе формулы Кардано на  $u$  и  $v$  налагалось условие  $3uv + p = 0$ . В нашем случае  $p = -1$ , т.е.  $3uv = 1$ .

Исходя из этого равенства,  $u_1$  соответствует  $v_3$ ,  $u_2$  соответствует  $v_2$ , а  $u_3$  соответствует  $v_1$ . Поэтому получаем три решения уравнения  $x^3 - x = 0$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_3 = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} = 1, \\ x_2 &= u_2 + v_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} = -1, \\ x_3 &= u_3 + v_1 = -i\frac{1}{\sqrt{3}} + i\frac{1}{\sqrt{3}} = 0. \end{aligned}$$

Вспомним, наши запросы к  $\mathbb{C}$  были довольно скромными: мы хотели извлекать квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Внезапно обнаружилось, что в  $\mathbb{C}$  можно извлекать корни *любой степени* из *любого комплексного числа*!

Но поле комплексных чисел обладает гораздо более сильным свойством: в  $\mathbb{C}$  есть корни у *алгебраического уравнения любой степени с произвольными комплексными коэффициентами*.

Это – *основная теорема алгебры комплексных чисел*, впервые доказанная «королем математиков» Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855) в 1799 г.

