

Тема III: Комплексные числа

§ 2. Построение поля комплексных чисел

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего.

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего.

Мы сейчас предъявим некоторую конструкцию, а затем проверим, что она дает поле, удовлетворяющее условиям 1)–3).

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего.

Мы сейчас предъявим некоторую конструкцию, а затем проверим, что она дает поле, удовлетворяющее условиям 1)–3).

Напомним, что поле — это множество, элементы которого можно складывать и умножать, так что выполняются все «обычные» свойства обычного умножения и обычного сложения действительных чисел.

Мы поставили такую задачу: найти *поле*, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего.

Мы сейчас предъявим некоторую конструкцию, а затем проверим, что она дает поле, удовлетворяющее условиям 1)–3).

Напомним, что поле — это множество, элементы которого можно складывать и умножать, так что выполняются все «обычные» свойства обычного умножения и обычного сложения действительных чисел.

Итак, нам нужно определить множество и две операции на нем.

Определение

Множество \mathbb{C} комплексных чисел — это декартов квадрат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества \mathbb{R} действительных чисел. Таким образом, *комплексное число* — это упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b .

Определение

Множество \mathbb{C} комплексных чисел — это декартов квадрат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества \mathbb{R} действительных чисел. Таким образом, *комплексное число* — это упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b .

Число a называется *действительной частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Re} z$), а число b — *мнимой частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Im} z$).

Определение

Множество \mathbb{C} комплексных чисел — это декартов квадрат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества \mathbb{R} действительных чисел. Таким образом, *комплексное число* — это упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b .

Число a называется *действительной частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Re} z$), а число b — *мнимой частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Im} z$).

Замечание

Мнимая часть комплексного числа — это действительное число!

Определение

Множество \mathbb{C} комплексных чисел — это декартов квадрат $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множества \mathbb{R} действительных чисел. Таким образом, *комплексное число* — это упорядоченная пара (a, b) действительных чисел a и b .

Число a называется *действительной частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Re} z$), а число b — *мнимой частью* числа $z = (a, b)$ (обозначение $\operatorname{Im} z$).

Суммой комплексных чисел $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$ называется число

$$z_1 + z_2 := (a + c, b + d),$$

а их *произведением* называется число

$$z_1 z_2 := (ac - bd, ad + bc).$$

Замечание

Мнимая часть комплексного числа — это действительное число!

Комплексные числа — это упорядоченные пары действительных чисел.

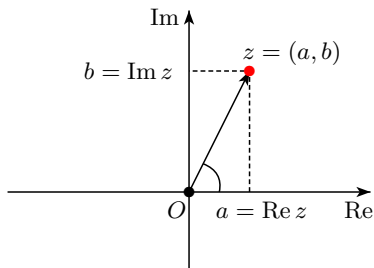
Комплексные числа — это упорядоченные пары действительных чисел. Но ведь упорядоченные пары действительных чисел — это координаты векторов плоскости в некотором фиксированном базисе.

Комплексные числа — это упорядоченные пары действительных чисел. Но ведь упорядоченные пары действительных чисел — это координаты векторов плоскости в некотором фиксированном базисе.

Поэтому комплексные числа можно (и полезно) изображать с помощью векторов (или точек) плоскости.

Комплексные числа — это упорядоченные пары действительных чисел. Но ведь упорядоченные пары действительных чисел — это координаты векторов плоскости в некотором фиксированном базисе. Поэтому комплексные числа можно (и полезно) изображать с помощью векторов (или точек) плоскости.

Комплексные числа — это упорядоченные пары действительных чисел. Но ведь упорядоченные пары действительных чисел — это координаты векторов плоскости в некотором фиксированном базисе. Поэтому комплексные числа можно (и полезно) изображать с помощью векторов (или точек) плоскости.



Геометрическая интерпретация комплексного числа

При этом используют прямоугольную декартову систему координат; ось абсцисс называют *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*.

Мы должны проверить, что \mathbb{C} — поле. Напомним аксиомы поля.

Мы должны проверить, что \mathbb{C} — поле. Напомним аксиомы поля.

Множество F с операциями сложения $+$ и умножения \cdot называется *полем*, если выполнены следующие 10 аксиом.

- 1 Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$.
- 2 Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c)$.
- 3 Существование нуля: $\exists 0 \in F \quad \forall a \in F \quad a + 0 = a$.
- 4 Существование противоположного элемента:
 $\forall a \in F \quad \exists b \in F \quad a + b = 0$.
- 5 Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F \quad ab = ba$.
- 6 Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F \quad (ab)c = a(bc)$.
- 7 Существование единицы: $\exists 1 \in F \quad \forall a \in F \quad a \cdot 1 = a$.
- 8 Существование обратного элемента для ненулевых элементов:
 $\forall a \in F \setminus \{0\} \quad \exists b \in F \quad ab = 1$.
- 9 Дистрибутивность умножения относительно сложения:
 $\forall a, b, c \in F \quad (a + b)c = ac + bc$.
- 10 Неодноэлементность: $1 \neq 0$.

Первые четыре аксиомы (аксиомы абелевой группы) следуют из свойств сложения векторов и свойств координат. Конечно, эти аксиомы легко проверить и непосредственно. Роль нуля в \mathbb{C} играет пара $(0,0)$.

Первые четыре аксиомы (аксиомы абелевой группы) следуют из свойств сложения векторов и свойств координат. Конечно, эти аксиомы легко проверить и непосредственно. Роль нуля в \mathbb{C} играет пара $(0,0)$.

Непосредственными вычислениями проверяются и аксиомы 5, 6 и 9 (коммутативность и ассоциативность умножения и дистрибутивность умножения относительно сложения). Например, если $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$, то $z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$, а $z_2 z_1 = (ca - db, da + cb)$, откуда $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Первые четыре аксиомы (аксиомы абелевой группы) следуют из свойств сложения векторов и свойств координат. Конечно, эти аксиомы легко проверить и непосредственно. Роль нуля в \mathbb{C} играет пара $(0,0)$.

Непосредственными вычислениями проверяются и аксиомы 5, 6 и 9 (коммутативность и ассоциативность умножения и дистрибутивность умножения относительно сложения). Например, если $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$, то $z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$, а $z_2 z_1 = (ca - db, da + cb)$, откуда $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Роль единицы в \mathbb{C} играет пара $(1,0)$. Действительно, для любой пары $(a, b) \in \mathbb{C}$ имеем $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$. Поскольку $(1, 0) \neq (0, 0)$, выполнена и аксиома 10.

Первые четыре аксиомы (аксиомы абелевой группы) следуют из свойств сложения векторов и свойств координат. Конечно, эти аксиомы легко проверить и непосредственно. Роль нуля в \mathbb{C} играет пара $(0,0)$.

Непосредственными вычислениями проверяются и аксиомы 5, 6 и 9 (коммутативность и ассоциативность умножения и дистрибутивность умножения относительно сложения). Например, если $z_1 = (a, b)$ и $z_2 = (c, d)$, то $z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc)$, а $z_2 z_1 = (ca - db, da + cb)$, откуда $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Роль единицы в \mathbb{C} играет пара $(1,0)$. Действительно, для любой пары $(a, b) \in \mathbb{C}$ имеем $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$. Поскольку $(1, 0) \neq (0, 0)$, выполнена и аксиома 10.

Остается проверить аксиому 8. Если $z = (a, b) \neq 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$.

Положим $t := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$. Тогда

$$\begin{aligned} zt &= (a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0). \end{aligned}$$

Мы поставили задачу: найти поле, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего.

Мы поставили задачу: найти поле, которое:

— сейчас мы находимся здесь —

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего.

Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел \mathbb{R} подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел \mathbb{R} подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Комплексное число $i := (0, 1)$ называется *мнимой единицей*.

Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел \mathbb{R} подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Комплексное число $i := (0, 1)$ называется *мнимой единицей*.

При геометрической интерпретации $1 = (1, 0)$ — орт действительной оси, а $i = (0, 1)$ — орт мнимой оси.

Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел \mathbb{R} подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Комплексное число $i := (0, 1)$ называется *мнимой единицей*.

При геометрической интерпретации $1 = (1, 0)$ — орт действительной оси, а $i = (0, 1)$ — орт мнимой оси.

По определению умножения комплексных чисел

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).$$

Как мы уже договорились, мы не различаем комплексное число $(-1, 0)$ и действительное число -1 . Таким образом, $i^2 = -1$. Мы видим, что в \mathbb{C} существует квадратный корень из -1 .

Мы будем отождествлять комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a и считать множество всех действительных чисел \mathbb{R} подмножеством множества всех комплексных чисел: $\mathbb{R} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Комплексное число $i := (0, 1)$ называется *мнимой единицей*.

При геометрической интерпретации $1 = (1, 0)$ — орт действительной оси, а $i = (0, 1)$ — орт мнимой оси.

По определению умножения комплексных чисел

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0).$$

Как мы уже договорились, мы не различаем комплексное число $(-1, 0)$ и действительное число -1 . Таким образом, $i^2 = -1$. Мы видим, что в \mathbb{C} существует квадратный корень из -1 .

Более того, если a — произвольное отрицательное действительное число, то $(0, \sqrt{-a})(0, \sqrt{-a}) = (a, 0) = a$. Итак, в \mathbb{C} существует квадратный корень из любого отрицательного числа.

Мы поставили задачу: найти поле, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
- 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- 3) не содержит ничего лишнего (т.е. среди всех полей со свойствами 1) и 2) наша конструкция — минимальная).

Мы поставили задачу: найти поле, которое:

- 1) содержит поле \mathbb{R} действительных чисел;
 - 2) содержит квадратные корни из отрицательных чисел;
- сейчас мы находимся здесь —
- 3) не содержит ничего лишнего (т.е. среди всех полей со свойствами 1) и 2) наша конструкция — минимальная).

Заметим, что $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Заметим, что $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Определение

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* числа (a, b) .

Заметим, что $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Определение

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* числа (a, b) .

Заметим, что

$$(a + bi) + (c + di) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Заметим, что $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi$.

Определение

Выражение $a + bi$ называется *алгебраической формой* числа (a, b) .

Заметим, что

$$(a + bi) + (c + di) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi)(c + di) = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Важный вывод:

- сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов от i ; при умножении дополнительно учитывается, что $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Пусть F — произвольное поле, которое содержит поле \mathbb{R} и квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Зафиксируем такой элемент $e \in F$, что $e^2 = -1$.

Пусть F — произвольное поле, которое содержит поле \mathbb{R} и квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Зафиксируем такой элемент $e \in F$, что $e^2 = -1$.

Тогда F содержит все элементы вида $a + be$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Ясно, что такие элементы складываются и перемножаются в F по тем же правилам, по которым складываются и перемножаются комплексные числа в алгебраической форме:

$$(a + be) + (c + de) = (a + c) + (b + d)e,$$

$$(a + be)(c + de) = (ac - bd) + (ad + bc)e.$$

Пусть F — произвольное поле, которое содержит поле \mathbb{R} и квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Зафиксируем такой элемент $e \in F$, что $e^2 = -1$.

Тогда F содержит все элементы вида $a + be$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Ясно, что такие элементы складываются и перемножаются в F по тем же правилам, по которым складываются и перемножаются комплексные числа в алгебраической форме:

$$(a + be) + (c + de) = (a + c) + (b + d)e,$$

$$(a + be)(c + de) = (ac - bd) + (ad + bc)e.$$

Сопоставим комплексному числу $a + bi \in \mathbb{C}$ элемент $a + be \in F$.

Легко проверить, что так определенное отображение взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения. Итак, поле \mathbb{C} *вкладывается* в поле F . Таким образом, \mathbb{C} вкладывается в любое поле, которое содержит \mathbb{R} и квадратные корни из отрицательных чисел.

Это и означает, что наша конструкция поля \mathbb{C} минимально возможная.

Пусть F — произвольное поле, которое содержит поле \mathbb{R} и квадратные корни из отрицательных действительных чисел. Зафиксируем такой элемент $e \in F$, что $e^2 = -1$.

Тогда F содержит все элементы вида $a + be$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Ясно, что такие элементы складываются и перемножаются в F по тем же правилам, по которым складываются и перемножаются комплексные числа в алгебраической форме:

$$(a + be) + (c + de) = (a + c) + (b + d)e,$$
$$(a + be)(c + de) = (ac - bd) + (ad + bc)e.$$

Сопоставим комплексному числу $a + bi \in \mathbb{C}$ элемент $a + be \in F$. Легко проверить, что так определенное отображение взаимно однозначно и сохраняет операции сложения и умножения. Итак, поле \mathbb{C} *вкладывается* в поле F . Таким образом, \mathbb{C} вкладывается в любое поле, которое содержит \mathbb{R} и квадратные корни из отрицательных чисел. Это и означает, что наша конструкция поля \mathbb{C} минимально возможная.

Более того, наш аргумент показывает, что поле \mathbb{C} единственно с точностью до *изоморфизма* — как бы мы не строили поле с условиями 1)–3), получится по существу одно и то же с точностью до выбора обозначений.

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к x* и обозначается через \bar{x} .

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к x* и обозначается через \bar{x} .

При геометрической интерпретации сопряжение — это отражение точки комплексной плоскости относительно действительной оси.

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к x* и обозначается через \bar{x} .

При геометрической интерпретации сопряжение — это отражение точки комплексной плоскости относительно действительной оси.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

- 1) $\overline{\bar{x}} = x$;
- 2) $x = \bar{x}$ тогда и только тогда, когда x — действительное число;
- 3) $x + \bar{x}$ — действительное число;
- 4) $x \cdot \bar{x}$ — действительное число; более того, $x \cdot \bar{x} \geq 0$, причем $x \cdot \bar{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 5) $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$;
- 6) $\overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Доказательство. Пусть $x = a + bi$ и $y = c + di$.

1) $\overline{\overline{x}} = \overline{a - bi} = a + bi = x$.

2) Если $x = \overline{x}$, т.е. $a + bi = a - bi$, то $2bi = 0$, откуда $b = 0$, и значит $x \in \mathbb{R}$. Обратно, если $x \in \mathbb{R}$, то $b = 0$, и потому $x = \overline{x}$.

3) Достаточно учесть, что $x + \overline{x} = 2a$.

4) А здесь достаточно учесть, что $x \cdot \overline{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

5) Ясно, что

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \\ &= (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{x} + \overline{y}. \end{aligned}$$

6) Ясно, что

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \overline{(a + bi)(c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{x} \cdot \overline{y}. \end{aligned}$$

Все свойства доказаны. □

Замечание

Если $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — комплексное число, не являющееся действительным, то z и \bar{z} — корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом. Обратно, корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом — комплексно сопряженные числа.

Замечание

Если $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — комплексное число, не являющееся действительным, то z и \bar{z} — корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом. Обратно, корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом — комплексно сопряженные числа.

Доказательство. Если $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $b \neq 0$. Ясно, что z и \bar{z} — корни уравнения

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z \cdot \bar{z} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0$.

Замечание

Если $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — комплексное число, не являющееся действительным, то z и \bar{z} — корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом. Обратно, корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом — комплексно сопряженные числа.

Доказательство. Если $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $b \neq 0$. Ясно, что z и \bar{z} — корни уравнения

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z \cdot \bar{z} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $a^2 - (a^2 + b^2) = -b^2 < 0$.

Обратно, если у квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с действительными коэффициентами дискриминант $\Delta := \frac{p^2}{4} - q$ отрицателен, то корни $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta}$ этого уравнения — комплексно сопряженные числа. □

Свойство 4) можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа $\frac{a+bi}{c+di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на $c-di$, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.\end{aligned}$$