Тема II: Прямые и плоскости

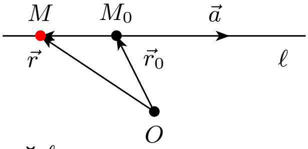
§ 3. Прямая в пространстве

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Предположим, что в пространстве зафиксирована система координат с началом в точке O. Пусть ℓ – прямая в пространстве, точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит ℓ, а вектор $\vec{a} = (q, r, s) \neq \vec{0}$ является направляющим вектором этой прямой. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r}_0$, а радиус-вектор точки M – через $\vec{r}$ (см. рисунок).



Точка M лежит на прямой ℓ тогда и только тогда, когда вектора $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны. Поскольку $\vec{a} \neq \vec{0}$, условие $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ равносильно тому, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого t. Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \ell$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ для некоторого t.

Это – *векторное уравнение* прямой. Заметим, что оно и выглядит, и выводится точно так же, как векторное уравнение прямой на плоскости.

Переходя в векторном уравнении $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ к координатам, получаем *параметрические уравнения прямой в пространстве*:

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st. \end{cases}$$

Выразим параметр t из уравнений этой системы и приравняем полученные выражения:

$$\frac{x - x_0}{q} = \frac{y - y_0}{r} = \frac{z - z_0}{s}.$$

Это – *канонические уравнения прямой в пространстве*. Если известны координаты двух различных точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, принадлежащих прямой, то вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ можно взять в качестве ее направляющего вектора. Подставляя его координаты в канонические уравнения прямой, получаем *уравнения прямой в пространстве по двум точкам*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Всякую прямую в пространстве можно рассматривать как пересечение двух плоскостей. Пусть ℓ – прямая, являющаяся пересечением плоскостей σ_1 и σ_2, а $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Точка $M(x, y, z)$ лежит на ℓ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

которые называются *общими уравнениями прямой в пространстве*. Из того, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются, вытекает, что либо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (см. теорему о взаимном расположении плоскостей).

Общие уравнения прямой обычно легче находить, так как сложная задача разбивается на две более простых подзадачи. *Пример*: провести из данной точки пространства перпендикуляр к данной прямой. В то же время канонические уравнения обычно удобнее использовать, так как они содержат явную информацию о точке и направляющем векторе прямой.

Каноническое уравнение прямой, заданной общими уравнениями

Пусть прямая ℓ задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Как найти ее каноническое уравнение? По условию либо $\frac{A_1}{A_2} \ne \frac{B_1}{B_2}$, либо $\frac{B_1}{B_2} \ne \frac{C_1}{C_2}$. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \ne \frac{B_1}{B_2}$. Пусть (x_0, y_0, z_0) – координаты некоторой точки, принадлежащей прямой ℓ. Тогда справедливы равенства $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0$. Вычтем первое из этих равенств из первого уравнения системы $(*)$, а второе – из второго уравнения этой системы. Получим систему уравнений, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = -C_1(z - z_0), \\ A_2(x - x_0) + B_2(y - y_0) = -C_2(z - z_0). \end{cases}$$

Будем смотреть на эту систему как на систему уравнений относительно $x - x_0$ и $y - y_0$. Поскольку $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, определитель этой системы отличен от 0. По теореме Крамера ее решение дается формулами:

$$x - x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1(z-z_0) & B_1 \\ -C_2(z-z_0) & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y - y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z-z_0) \\ A_2 & -C_2(z-z_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \qquad (1)$$

Вынося общий множитель элементов столбца за знак определителя, получаем, что

$$\begin{vmatrix} -C_1(z-z_0) & B_1 \\ -C_2(z-z_0) & B_2 \end{vmatrix} = (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & -C_1(z-z_0) \\ A_2 & -C_2(z-z_0) \end{vmatrix} = -(z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

(В первом случае мы переставили столбцы, что привело к смене знака.)

Следовательно, равенства (1) можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

или в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Мы получили каноническое уравнение прямой ℓ. Попутно получено

Замечание о направляющем векторе прямой в пространстве

Вектор

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

является направляющим вектором прямой, заданной уравнениями $(*)$.

Мы вывели замечание о направляющем векторе прямой в пространстве в произвольной системе координат. Формулы получились достаточно громоздкими и несколько загадочными. Однако в случае, когда система координат прямоугольная декартова, они имеют очень простую интерпретацию (и намного более простой вывод).

Итак, предположим, что прямая ℓ задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

в прямоугольной декартовой системе координат. Обозначим плоскости, задаваемые первым и вторым уравнением системы, через σ_1 и σ_2 соответственно. Вектора $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ являются теперь нормальными векторами плоскостей σ_1 и σ_2 соответственно. Положим $\vec{b} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Тогда $\vec{b} \perp \vec{n}_1$. Поскольку $\vec{n}_1 \perp \sigma_1$, получаем, что $\vec{b} \parallel \sigma_1$. Аналогично проверяется, что $\vec{b} \parallel \sigma_2$. Но тогда $\vec{b}$ коллинеарен прямой, по которой пересекаются плоскости σ_1 и σ_2, т. е. прямой ℓ. Далее, из того, что $\sigma_1 \nparallel \sigma_2$, вытекает, что $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, откуда $\vec{b} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$. Таким образом, вектор $\vec{b}$ является направляющим вектором прямой ℓ.

Осталось заметить, что векторное произведение векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеет в точности координаты

$$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right).$$

Следствие

Если прямая задана как пересечение двух плоскостей и известны уравнения этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат, то в качестве направляющего вектора этой прямой можно взять векторное произведение главных векторов этих плоскостей.

Подводя итог, получаем такое *правило*: в качестве направляющего вектора прямой, заданной как пересечение двух плоскостей, можно взять вектор с координатами, вычисленными по формуле для координат векторного произведения главных векторов этих плоскостей в прямоугольной декартовой системе координат.

Отметим, что это правило работает для *любой системы координат*, хотя когда система координат произвольна, нельзя утверждать, что векторное произведение главных векторов двух пересекающихся плоскостей параллельно прямой, по которой эти плоскости пересекаются.

Взаимное расположение прямой и плоскости (1)

Перейдем к вопросу о взаимном расположении прямой и плоскости.

Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости

Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая ℓ – уравнениями $\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st. \end{cases}$ *Тогда:*

1) *ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$;*
2) *ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;*
3) *ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.*

Доказательство. Подставим $x_0 + qt$, $y_0 + rt$, $z_0 + st$ вместо x, y и z в уравнение плоскости. Получим уравнение

$$A(x_0 + qt) + B(y_0 + rt) + C(z_0 + st) + D = 0. \qquad (2)$$

Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит одновременно и ℓ, и σ, то значение параметра t, соответствующее точке M, является решением уравнения (2). Следовательно, ℓ и σ пересекаются тогда и только тогда, когда это уравнение имеет единственное решение; ℓ и σ параллельны тогда и только тогда, когда оно не имеет решений; наконец, ℓ лежит в σ тогда и только тогда, когда это уравнение имеет бесконечно много решений. Уравнение (2) можно переписать в виде

$$(Aq + Br + Cs)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Ясно, что оно имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs \neq 0$, что доказывает утверждение 1); не имеет решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, что доказывает утверждение 2); имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $Aq + Br + Cs = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, что доказывает утверждение 3). □

Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве

Пусть прямые ℓ_1 *и* ℓ_2 *заданы уравнениями*

$$\begin{cases} x = x_1 + q_1 t, \\ y = y_1 + r_1 t, \\ z = z_1 + s_1 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = x_2 + q_2 t, \\ y = y_2 + r_2 t, \\ z = z_2 + s_2 t \end{cases}$$

соответственно. Положим $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}$.

1) ℓ_1 *и* ℓ_2 *скрещиваются тогда и только тогда, когда* $\Delta \neq 0$;
2) ℓ_1 *и* ℓ_2 *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$ *и либо* $\frac{q_1}{q_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$, *либо* $\frac{r_1}{r_2} \neq \frac{s_1}{s_2}$;
3) ℓ_1 *и* ℓ_2 *параллельны тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ *и либо* $\frac{x_2 - x_1}{q_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{r_1}$, *либо* $\frac{y_2 - y_1}{r_1} \neq \frac{z_2 - z_1}{s_1}$;
4) ℓ_1 *и* ℓ_2 *совпадают тогда и только тогда, когда* $\Delta = 0$, $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$ *и* $\frac{x_2 - x_1}{q_1} = \frac{y_2 - y_1}{r_1} = \frac{z_2 - z_1}{s_1}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ – направляющий вектор прямой ℓ_1; $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ – направляющий вектор прямой ℓ_2; $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка прямой ℓ_1; $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точка прямой ℓ_2. Ясно, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ компланарны. Утверждение 1) вытекает теперь из критерия компланарности.

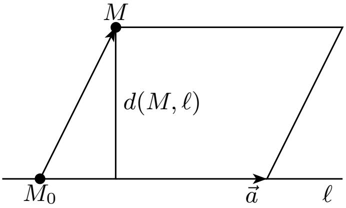
Предположим теперь, что $\Delta = 0$. Прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются тогда и только тогда, когда $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$. Учитывая критерий коллинеарности векторов, получаем утверждение 2).

Пусть, наконец, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$. Ясно, что в этом случае прямые либо параллельны, либо совпадают. Чтобы разделить два этих случая, достаточно проверить, лежит ли точка M_2 на прямой ℓ_1. Если ответ положителен, то прямые совпадают, в противном случае – параллельны. Учитывая, что канонические уравнения прямой ℓ_1 имеют вид $\frac{x-x_1}{q_1} = \frac{y-y_1}{r_1} = \frac{z-z_1}{s_1}$, получаем утверждения 3) и 4). $\square$

Пусть прямая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + qt, \\ y = y_0 + rt, \\ z = z_0 + st, \end{cases}$$

а $M(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка пространства. Точку с координатами (x_0, y_0, z_0) обозначим через M_0, а вектор с координатами (q, r, s) – через $\vec{a}$, см. рисунок.



Видно, что расстояние $d(M, \ell)$ от точки M до прямой ℓ это – высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Обозначим его площадь через S. Тогда $d(M, \ell) = \dfrac{S}{|\,\vec{a}\,|}$.

Расстояние от точки до прямой (2)

Вспоминая геометрический смысл векторного произведения векторов, получаем, что

$$d(M,\ell) = \frac{|\,\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M}\,|}{|\,\vec{a}\,|}\,.$$

Если система координат прямоугольная декартова, можно явно выразить $d(M,\ell)$ через координаты точек M_0 и M и вектора $\vec{a}$:

$$d(M,\ell) = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} r & s \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q & s \\ x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q & r \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}{q^2 + r^2 + s^2}}\,.$$

Наша следующая цель – научиться находить расстояние между скрещивающимися прямыми. Что понимается под таким расстоянием?

Определение

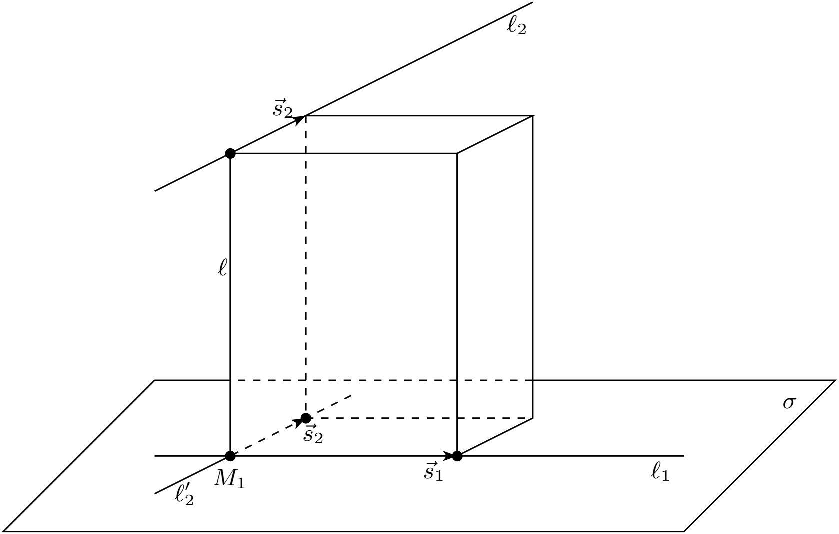
Пусть ℓ_1 и ℓ_2 – скрещивающиеся прямые. *Общим перпендикуляром* к прямым ℓ_1 и ℓ_2 называется прямая, перпендикулярная к каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_2 и пересекающая каждую из них.

То, что общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым всегда существует, не вполне очевидно.

Теорема об общем перпендикуляре

Для произвольных скрещивающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 общий перпендикуляр существует и определяется однозначно.

Доказательство. Пусть $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ – направляющие вектора прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Обозначим через σ плоскость, проходящую через ℓ_1 параллельно ℓ_2, а через ℓ_2' – ортогональную проекцию прямой ℓ_2 на σ. Поскольку $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$, прямые ℓ_1 и ℓ_2' пересекаются в какой-то точке M_1. Восставим из M_1 перпендикуляр ℓ к σ. Из построения прямой ℓ_2' и того, что $M_1 \in \ell_2'$ следует, что прямые ℓ и ℓ_2 пересекаются и перпендикулярны. Итак, ℓ – общий перпендикуляр к ℓ_1 и ℓ_2. $\square$



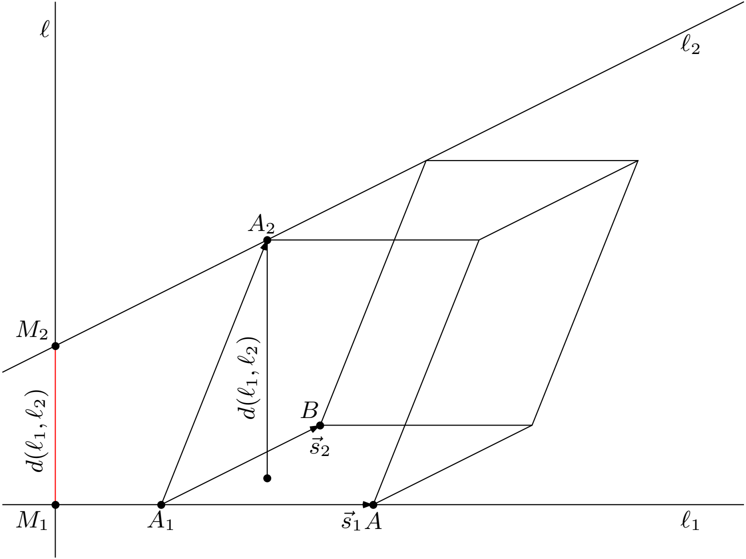
Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Определение

Расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, называется *расстоянием между скрещивающимися прямыми* ℓ_1 и ℓ_2.

Такое определение расстояния между скрещивающимися прямыми естественно, поскольку, как несложно показать, расстояние между точками, в которых общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым ℓ_1 и ℓ_2 пересекает эти прямые, равно минимуму из длин всех отрезков вида A_1A_2, где $A_1 \in \ell_1$, а $A_2 \in \ell_2$.

Возьмем произвольные точки $A_1 \in \ell_1$ и $A_2 \in \ell_2$. Обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 с их общим перпендикуляром, а через A и B – концы направленных отрезков, которые получатся, если отложить от точки A_1 направляющие вектора $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно (см. рисунок на следующем слайде). Ясно, что расстояние $d(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, т. е. длина отрезка M_1M_2, равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B}$.



Расстояние между скрещивающимися прямыми

Длина высоты параллелепипеда равна частному от деления его объема на площадь основания. Таким образом, чтобы найти расстояние между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, надо объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{s}_1 = \overrightarrow{A_1A}$ и $\vec{s}_2 = \overrightarrow{A_1B}$, разделить на площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{A_1B}$. Вспоминая геометрический смысл векторного и смешанного произведений, получаем

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\,\overrightarrow{A_1A_2}\vec{s}_1\vec{s}_2\,|}{|\,\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\,|}.$$

Если система координат прямоугольная декартова, можно выразить $d(\ell_1, \ell_2)$ через координаты точек A_1 и A_2 и векторов $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$. Обозначим координаты A_1 и A_2 через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), а координаты $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ – через (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) соответственно. Тогда:

$$d(\ell_1, \ell_2) = \frac{\text{abs}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_1c_2 - c_1a_2)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2}}$$

(символом abs здесь обозначен модуль).

Формулы для углов приведем для случая прямоугольной декартовой системы координат.
Углом между прямыми (вне зависимости от их взаимного расположения) естественно считать угол между их направляющими векторами.
Так, если даны прямые с направляющими векторами (q_1, r_1, s_1) и (q_2, r_2, s_2), то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{q_1q_2 + r_1r_2 + s_1s_2}{\sqrt{q_1^2 + r_1^2 + s_1^2} \cdot \sqrt{q_2^2 + r_2^2 + s_2^2}}.$$

.
Если прямые на плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол α между этими прямыми можно найти по формуле

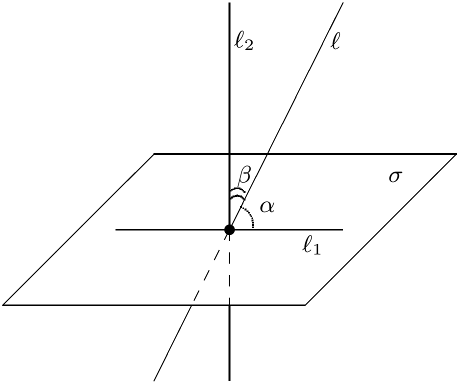
$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Угол между плоскостями

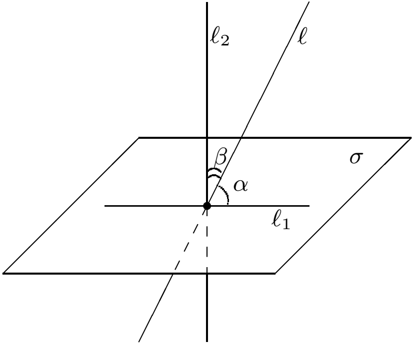
Величина угла между плоскостями определяется как величина линейного угла этого двугранного угла.
Если плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол между этими плоскостями можно найти, вычисляя угол α между их главными векторами по формуле

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Углом между прямой ℓ и плоскостью σ называется угол между прямой ℓ и ее проекцией на σ, см. рисунок.



Здесь ℓ_1 – проекция ℓ на σ, а ℓ_2 – перпендикуляр к σ, проходящий через точку пересечения ℓ и σ. Если α – угол между ℓ и ℓ_1, а β – острый угол между ℓ и ℓ_2, то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.



Пусть (q, r, s) – направляющий вектор прямой ℓ, а $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости σ. Тогда прямая ℓ_2 коллинеарна главному вектору (A, B, C) плоскости σ. Отсюда

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{|qA + rB + sC|}{\sqrt{q^2 + r^2 + s^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Модуль в числителе появился из-за того, что угол между прямой и плоскостью не больше $\frac{\pi}{2}$, откуда $\sin\alpha = \cos\beta \geq 0$, а скалярное произведение векторов (q, r, s) и (A, B, C) может быть и отрицательным.