Тема II: Прямые и плоскости

§ 2. Плоскость

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Основная теорема об уравнении плоскости

Этот параграф построен по тому же плану, что и предыдущий. Многие утверждения схожи как по формулировкам, так и по доказательствам. Если единственным отличием в доказательстве является появление у точек и векторов третьих координат, мы не повторяем рассуждение.

Теорема об уравнении плоскости

Пусть в пространстве задана произвольная система координат. Тогда всякая плоскость может быть задана некоторым уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от 0. Обратно, любое уравнение

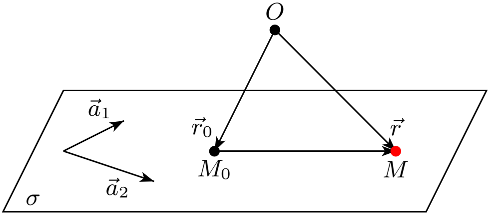
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от 0, задает некоторую плоскость.

Определение

Любой ненулевой вектор, коллинеарный данной плоскости, называется ее *направляющим вектором*.

Зафиксируем систему координат с началом в точке O. Пусть σ – плоскость, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка плоскости σ, $\vec{a}_1 = (q_1, r_1, s_1)$ и $\vec{a}_2 = (q_2, r_2, s_2)$ – направляющие вектора, не коллинеарные между собой. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка пространства. Обозначим радиус-вектор точки M_0 через $\vec{r}_0$, а радиус-вектор точки M – через $\vec{r}$.



Точка M лежит в плоскости σ тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен σ.

Вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис плоскости σ. Если вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$ коллинеарны, то в силу теоремы о разложении вектора по базису плоскости существуют числа u и v такие, что $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$. Обратно, очевидно, что если $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых u и v, то $\overrightarrow{M_0M} \parallel \sigma$. Таким образом, $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых u и v. Поскольку $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$, получаем, что $M \in \sigma$ тогда и только тогда, когда $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ для некоторых чисел u и v. Это – *векторное уравнение* плоскости.

Координаты векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ совпадают с координатами точек M и M_0 соответственно. Расписав равенство $\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2$ в координатах, получаем уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + q_1u + q_2v, \\ y = y_0 + r_1u + r_2v, \\ z = z_0 + s_1u + s_2v, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости*.

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ компланарны. Из замечания о координатах компланарных векторов вытекает, что это условие эквивалентно выполнению равенства

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое называется *канонческим уравнением плоскости*.

Разложив определитель по первой строке, получим равенство:

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (x - x_0) - \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} \cdot (y - y_0) + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} \cdot (z - z_0) = 0.$$

Если обозначить

$$A := \begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad B := -\begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix}, \quad C := \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix},$$

оно перепишется так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доказательство прямого утверждения теоремы (4)

Если положить $D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то равенство

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

можно переписать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Легко понять, что если $A = B = C = 0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} r_1 & s_1 \\ r_2 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & s_1 \\ q_2 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{s_1}{s_2}$. В силу критерия коллинеарности векторов это означает, что вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны вопреки их выбору.
Итак, мы доказали, что плоскость σ задается уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от 0.

Рассмотрим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A \neq 0$, или $B \neq 0$, или $C \neq 0$. Для определенности будем считать, что $A \neq 0$. Возьмем произвольное решение (x_0, y_0, z_0) уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$. (Можно взять, например, $x_0 := -\frac{D}{A}$, $y_0 = z_0 := 0$.) Положим $\vec{a}_1 := (-B, A, 0)$ и $\vec{a}_2 := (-C, 0, A)$. Из того, что $A \neq 0$, вытекает, что координаты векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ непропорциональны, а значит, эти вектора неколлинеарны. Обозначим через σ плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ коллинеарно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Докажем, что σ задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Запишем каноническое уравнение плоскости σ:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Раскрывая определитель по первой строке, имеем $A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0$. Разделив это уравнение на $A \neq 0$, получим $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Поскольку $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, имеем $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Следовательно, уравнение $(*)$ равносильно уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$. $\square$

Замечание о направляющих векторах

Из доказательства теоремы легко выводится следующий полезный факт.

Замечание о направляющих векторах плоскости

Пусть плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. *Положим* $\vec{s}_1 := (-B, A, 0)$, $\vec{s}_2 := (-C, 0, A)$ *и* $\vec{s}_3 := (0, -C, B)$. *Тогда по крайней мере два из векторов* $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$ *не коллинеарны и являются направляющими векторами плоскости (если* $A \neq 0$, *этими свойствами обладают вектора* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_2$, *если* $B \neq 0$ *– вектора* $\vec{s}_1$ *и* $\vec{s}_3$, *а если* $C \neq 0$ *– вектора* $\vec{s}_2$ *и* $\vec{s}_3$*).*

Определение

Пусть плоскость π задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *главным вектором* плоскости π.

Замечание о главном векторе плоскости

Главный вектор плоскости не коллинеарен этой плоскости.

Мы опускаем доказательство этого факта, поскольку оно вполне аналогично доказательству замечания о главном векторе прямой.

Еще одно замечание

Если система координат является прямоугольной декартовой, замечание о главном векторе плоскости можно уточнить. В этом случае скалярное произведение векторов (A, B, C) и $(-B, A, 0)$ равно $-AB + BA = 0$, т. е. эти вектора ортогональны. Аналогично проверяется ортогональность вектора (A, B, C) каждому из векторов $(-C, 0, A)$ и $(0, -C, B)$. В силу замечания о направляющих векторах плоскости вектор (A, B, C) ортогонален к двум неколлинеарным векторам, лежащим в плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Следовательно, справедливо

Замечание о нормальном векторе плоскости

Если система координат является прямоугольной декартовой, то главный вектор плоскости перпендикулярен этой плоскости. В этом случае главный вектор плоскости называют ее нормальным вектором.

Обратно, если известны координаты (A, B, C) какого-то ненулевого вектора $\vec{n}$, перпендикулярного плоскости σ, и координаты (x_0, y_0, z_0) какой-то точки M_0 этой плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, то можно сразу записать уравнение плоскости σ так: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Действительно, если $M(x, y, z)$ – произвольная точка, то последнее равенство выполнено тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, т.е. тогда и только тогда, когда $M \in \sigma$.

Предположим, что даны координаты трех точек, принадлежащих плоскости и не лежащих на одной прямой, – $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ коллинеарны плоскости и не коллинеарны между собой (последнее гарантировано тем обстоятельством, что точки M_0, M_1 и M_2 не лежат на одной прямой). Подставляя их координаты в каноническое уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0,$$

получаем *уравнение плоскости по трем точкам*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Взаимное расположение двух плоскостей

Теорема о взаимном расположении плоскостей

Пусть плоскость σ_1 задана уравнением $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, а плоскость σ_2 – уравнением $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Плоскости σ_1 и σ_2:

1) *пересекаются тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ *или* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
2) *параллельны тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$;
3) *совпадают тогда и только тогда, когда* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2. \end{cases}$$

Ясно, что плоскости σ_1 и σ_2 пересекаются тогда и только тогда, когда эта система имеет решение, но уравнения системы не равносильны; параллельны тогда и только тогда, когда система не имеет решений; совпадают тогда и только тогда, когда уравнения системы равносильны.

Предположим сначала, что коэффициенты при неизвестных непропорциональны, т. е. $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. Для определенности будем считать, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Убедимся, что плоскости пересекаются. Придадим z значение 0; тогда система сведется к

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2. \end{cases}$$

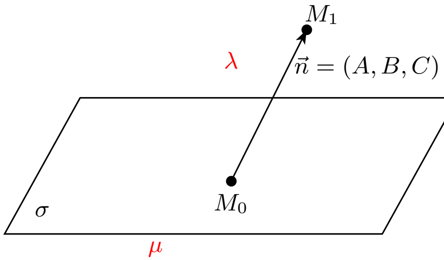
Условие $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ означает, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Поэтому последняя система имеет единственное решение (теорема Крамера). Обозначим его через (x_0, y_0). Тогда тройка чисел $(x_0, y_0, 0)$ будет решением исходной системы. Следовательно, плоскости σ_1 и σ_2 имеют по крайней мере одну общую точку, т.е. либо пересекаются, либо совпадают. Предположим, что $\sigma_1 = \sigma_2$. Пересечение σ_1 с координатной плоскостью $z = 0$ содержит точку $M_0(x_0, y_0, 0)$, а значит, содержит и некоторую прямую. Пусть $M_1(x_1, y_1, 0)$ – точка этой прямой, отличная от M_0. Тогда пара чисел (x_1, y_1) отлична от (x_0, y_0) и является решением системы $\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1, \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases}$ – противоречие с тем, что эта система имеет единственное решение.

Взаимное расположение двух плоскостей (3)

Мы доказали достаточность в утверждении 1) теоремы о взаимном расположении плоскостей. Достаточность в утверждениях 2) и 3) доказывается вполне аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости.

После того, как достаточность во всех трех утверждениях доказана, легко понять, что в каждом из этих утверждений верна и необходимость (аргумент с разбиением на взаимоисключающие случаи, см. конец доказательства теоремы о взаимном расположении прямых на плоскости). $\square$

Как по уравнению плоскости и координатам двух точек, не лежащих в этой плоскости, определить, лежат ли они по одну сторону или по разные стороны от плоскости? Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Все пространство делится этой плоскостью на три непересекающиеся части: саму плоскость σ и два *полупространства* (в каждое из этих полупространств входят те и только те точки, которые расположены по какую-либо одну сторону от σ).



Возьмем точку $M_0 \in \sigma$ и отложим от нее главный вектор плоскости σ. Конец получившегося направленного отрезка обозначим через M_1. По замечанию о главном векторе плоскости $M_1 \notin \sigma$. Обозначим то полупространство, в котором лежит M_1, через λ, а другое – через μ.

Полупространства, определяемые плоскостью (2)

Теорема о полупространствах

Пусть $M(x', y', z')$ *– произвольная точка пространства. Если* $M \in \lambda$, *то* $Ax' + By' + Cz' + D > 0$, *а если* $M \in \mu$, *то* $Ax' + By' + Cz' + D < 0$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оно вполне аналогично доказательству теоремы о полуплоскостях из § 1. Из теоремы о полупространствах вытекает ответ на сформулированный выше вопрос.

Следствие о расположении двух точек относительно плоскости

Точки $P(x_1, y_1, z_1)$ *и* $Q(x_2, y_2, z_2)$ *расположены по одну сторону от плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ *тогда и только тогда, когда числа* $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ *и* $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ *имеют одинаковый знак, и по разные стороны от этой плоскости тогда и только тогда, когда числа* $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ *и* $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ *имеют разные знаки.*

Расстояние от точки до плоскости

Укажем формулу для расстояния от точки до плоскости. *Будем предполагать, что система координат прямоугольная декартова.*

Пусть плоскость σ задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а $M(x', y', z')$ – некоторая точка пространства. Обозначим через $d(M, \sigma)$ расстояние от M до σ. Тогда справедлива следующая формула:

$$d(M, \sigma) = \frac{|Ax' + By' + Cz' + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Мы опускаем вывод этой формулы, поскольку он вполне аналогичен выводу формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости из § 1.