Тема I: Векторная алгебра

§ 6. Система координат. Координаты точки

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

В школьном курсе сначала вводятся координаты точки, а затем с их помощью определяются координаты вектора. У нас координаты вектора появились в § 1; теперь на их основе определим координаты точки.

Определения

Системой координат в пространстве [*на плоскости*] называется совокупность базиса пространства [соответственно базиса плоскости] и точки [принадлежащей этой плоскости]. Точка называется *началом координат*. Систему координат, состоящую из базиса $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ и начала координат O, будем обозначать через $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$; в случае плоскости используется обозначение $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Прямые, проходящие через точку O параллельно одному из базисных векторов, называются *осями координат*. Прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_1$, называют *осью абсцисс*, прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_2$, – *осью ординат*, а прямую, проходящую через точку O параллельно вектору $\vec{b}_3$, – *осью аппликат*. Плоскости, проходящие через точку O и две из трех осей координат, называются *координатными плоскостями*.

Определение

Зафиксируем в пространстве некоторую систему координат $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. *Координатами точки* M в системе координат $(O;\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ называются координаты ее радиуса-вектора в базисе $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$. То, что точка M в некоторой системе координат имеет координаты (a_1,a_2,a_3), обозначают так: $M(a_1,a_2,a_3)$. Координаты точки на плоскости определяются аналогично координатам точки в пространстве.

Пусть точки A и B имеют координаты (a_1,a_2,a_3) и (b_1,b_2,b_3) соответственно. Учитывая, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, а координаты точек A и B совпадают с координатами векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ соответственно, получаем, что

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3).$$

Иными словами,

- *чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты его начала.*

Определение

Система координат в пространстве $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный. Система координат на плоскости $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ называется *прямоугольной декартовой*, если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — ортонормированный.

- Именно в прямоугольной декартовой системе координат многие формулы и уравнения принимают наиболее простой и удобный для применения вид.

В прямоугольной декартовой системе координат оси абсцисс, ординат и аппликат принято обозначать через Ox, Oy и Oz соответственно. В этом случае в понятном смысле используются также обозначения Oxy, Oxz и Oyz для координатных плоскостей, а вся система координат обозначается через $Oxyz$ (в случае пространства) или Oxy (в случае плоскости).

Расстояние между точками

Пусть точки A и B в прямоугольной декартовой системе координат имеют координаты (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) соответственно. Учитывая формулу для координат вектора из данного параграфа и формулу для длины вектора из § 2, получаем, что расстояние между точками A и B вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

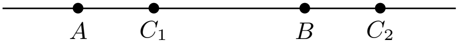
Деление отрезка в данном отношении: определение и примеры

Определение

Пусть даны различные точки A и B и число t. Будем говорить, что *точка C делит отрезок AB в отношении t*, если

$$\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Например, если C — середина отрезка AB, то она делит его в отношении 1 (так как в этом случае $\overrightarrow{AC} = 1 \cdot \overrightarrow{CB}$), точка A делит его в отношении 0 (так как $\overrightarrow{AA} = \vec{0} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$), а точка B не делит его ни в каком отношении (так как $\overrightarrow{BB} = \vec{0}$ и не существует такого числа t, что $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{BB}$).
На рисунке точка C_1 делит отрезок AB в отношении $\frac{1}{2}$, а точка C_2 – в отношении -4.



Деление отрезка в данном отношении

- Как видно из последнего примера, точка, делящая отрезок в некотором отношении, не обязана принадлежать этому отрезку.

Деление отрезка в данном отношении: формулы

При $t = -1$ равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ невозможно, поскольку тогда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ в противоречии с тем, что точки A и B различны. Пусть $t \neq -1$. Предположим, что точка C, делящая отрезок AB в отношении t, существует. Выведем формулы для нахождения ее координат, если известны координаты $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ и число t. Обозначим координаты точки C через (c_1, c_2, c_3). Расписывая равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ в координатах, имеем

$$\begin{cases} c_1 - a_1 = t(b_1 - c_1), \\ c_2 - a_2 = t(b_2 - c_2), \\ c_3 - a_3 = t(b_3 - c_3). \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \dfrac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \dfrac{a_3 + tb_3}{1+t}. \end{cases} \qquad (*)$$

Это – *формулы деления отрезка в отношении* t.

Равенства $(*)$ показывают, что если точка C существует, то она единственна. Прямой подстановкой проверяется, что точка C, координаты которой задаются равенствами $(*)$, удовлетворяет равенству $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$. Вывод: точка C, делящая отрезок AB в отношении t, существует тогда и только тогда, когда $t \neq -1$, причем при выполнении этого условия она единственна.

Посмотрим, где эта точка может располагаться. В силу равенства $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$ направленные отрезки $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Это означает, что точка C должна лежать на прямой AB. Как отмечалось выше, она не может совпадать с точкой B. Пусть теперь C – произвольная точка прямой AB, отличная от B. Тогда векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны и $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$. В силу критерия коллинеарности векторов существует такое число t, что выполнено равенство $\overrightarrow{AC} = t \cdot \overrightarrow{CB}$.
Итак,

- *точка C делит отрезок AB в некотором отношении тогда и только тогда, когда она принадлежит прямой AB и отлична от точки B. При этом, если C принадлежит отрезку AB, то $\overrightarrow{AC} \upuparrows \overrightarrow{CB}$, и потому $t \geqslant 0$, а в противном случае $\overrightarrow{AC} \updownarrows \overrightarrow{CB}$, и потому $t < 0$.*

Координаты середины отрезка

Отметим один важный частный случай. Пусть C — середина отрезка AB. Как уже отмечалось, середина отрезка делит его в отношении 1. Подставляя $t = 1$ в формулы

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{a_1 + tb_1}{1+t}, \\ c_2 = \dfrac{a_2 + tb_2}{1+t}, \\ c_3 = \dfrac{a_3 + tb_3}{1+t}, \end{cases} \qquad (*)$$

получаем координаты точки C:

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right).$$

Иными словами,

- *координаты середины отрезка суть полусуммы соответствующих координат его начала и конца.*