

Тема I: Векторная алгебра

§ 5. Смешанное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное. Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя! Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Определение

Смешанным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов \vec{a} и \vec{b} на вектор \vec{c} . Смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

- Как и в случае скалярного произведения, результатом смешанного произведения является число.

Критерий компланарности векторов

Вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

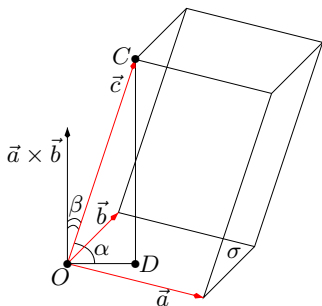
Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору \vec{c} . Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору \vec{c} . Но вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости σ , образованной векторами \vec{a} и \vec{b} . Поскольку \vec{c} ортогонален этому вектору, то он лежит в σ . А это означает, что вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. \square

Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)

Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

Доказательство. Пусть \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — три некопланарных вектора. Предположим сначала, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок на следующем слайде.



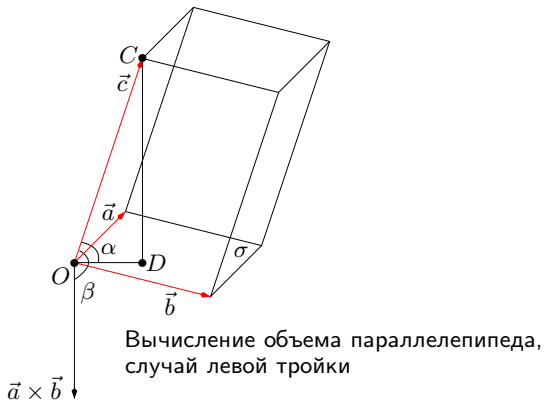
Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Отложим вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} от некоторой точки O . Пусть точка C такова, что $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, а D — проекция точки C на плоскость векторов \vec{a} и \vec{b} , которую мы обозначим через σ . Угол между вектором \vec{c} и плоскостью σ обозначим через α , а угол между векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ и \vec{c} — через β . Учитывая, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ и потому $\sin \alpha = \cos \beta$, и используя геометрический смысл векторного произведения, имеем

$$\begin{aligned} V &= S_{\text{очн}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \alpha = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c}. \end{aligned}$$

Геометрический смысл смешанного произведения (3)

Пусть теперь тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. Тогда $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок), откуда $\sin \alpha = -\cos \beta$.



Имеем

$$\begin{aligned} V &= S_{\text{осн}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \alpha = \\ &= -|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}. \end{aligned}$$

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. □

Из доказательства теоремы вытекает важное следствие:

Замечание об ориентации тройки векторов

Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.

Именно поэтому правая тройка векторов называется положительно ориентированной, а левая — отрицательно ориентированной.

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и \vec{d} – произвольные вектора, а t – произвольное число, то:

- 1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
- 2) $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу);
- 4) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу);
- 5) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов по третьему аргументу).

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$. Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. □

Заметим, что из равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ вытекает своего рода «ассоциативность»:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Действительно, левая часть по определению равна $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а так как скалярное произведение коммутативно, правая часть есть $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$. Итак, в выражении $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ на самом деле не важно, какие из векторов перемножаются векторно, а какие скалярно. Это оправдывает симметрию в обозначении для смешанного произведения.

Доказательство свойства 2). Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{c}) = t((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Используя это равенство и свойство 1) смешанного умножения, имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t \cdot \vec{b}\vec{c}\vec{a} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Равенство $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ проверяется аналогично предыдущему. □

Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано. □

Используя свойства 1) и 5) смешанного умножения, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{d}\vec{a} + \vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Свойство 3) доказано. Свойство 4) доказывается аналогично. □

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если \vec{a} и \vec{b} – произвольные вектора, а t – произвольное число, то $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$.

Пусть \vec{x} – произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t\vec{a})\vec{b}\vec{x} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{x} = t \cdot ((\vec{a} \times \vec{b})\vec{x}) = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}.$$

Таким образом, $((t\vec{a}) \times \vec{b})\vec{x} = (t(\vec{a} \times \vec{b}))\vec{x}$ для всякого вектора \vec{x} . В силу ослабленного закона сокращения для скалярного умножения имеем $(t\vec{a}) \times \vec{b} = t(\vec{a} \times \vec{b})$. Аналогично проверяется, что $\vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$.

Итак, скаляры можно выносить за знак векторного произведения. □

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} – произвольные вектора, то $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$. Пусть \vec{x} – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\begin{aligned} ((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) \vec{x} &= (\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{x} = \vec{a} \vec{c} \vec{x} + \vec{b} \vec{c} \vec{x} = \\ &= (\vec{a} \times \vec{c}) \vec{x} + (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) \vec{x}. \end{aligned}$$

Таким образом, $((\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}) \vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) \vec{x}$ для всякого вектора \vec{x} . Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$. Итак, векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. □

Здесь проверена дистрибутивность по первому аргументу. Мы отмечали, что дистрибутивность по второму аргументу следует из дистрибутивности по первому аргументу и антикоммутативности. Легко понять, что можно и дистрибутивность по второму аргументу доказывать с помощью того же приема, не задействуя антикоммутативность.

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пусть \vec{a} и \vec{b} — произвольные вектора. По определению векторного произведения векторный квадрат любого вектора равен $\vec{0}$, откуда

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Но первое и последнее слагаемое равны $\vec{0}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$, т.е. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю. Используя этот факт и свойства смешанного умножения, получаем

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3) \cdot \vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + \\ &+ (x_2y_3z_1) \cdot \vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2) \cdot \vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1) \cdot \vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1.\end{aligned}$$

Используя свойство 1) смешанного умножения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как определитель 3-го порядка, в котором по строкам записаны координаты векторов \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} . Следовательно,

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

В качестве следствия получаем

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) — координаты векторов \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} соответственно в некотором базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Вектора \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Из определения базиса и критерия компланарности

векторов вытекает, что $\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 \neq 0$. Формула $\vec{x} \vec{y} \vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3$

влечет, что $\vec{x} \vec{y} \vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$. Остается

сослаться на критерий компланарности. □

Вычисление смешанного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$, и потому

$$\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \vec{b}_3 = \vec{b}_3 \vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3$ принимает совсем простой вид:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.

Используя смешанное произведение, можно

- 1) вычислить объем V параллелепипеда, построенного на \vec{x} , \vec{y} и \vec{z} :

$$V = \text{abs} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

- 2) определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ положительно (отрицательно) ориентирована тогда и только тогда,

когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0$ (соответственно $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0$.)

Закljučаем, что геометрический смысл определителя 3-го порядка – **ориентированный объем** параллелепипеда.