Тема I: Векторная алгебра

§ 5. Смешанное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Всё смешалось в доме Облонских

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.

Всё смешалось в доме Облонских

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!

Всё смешалось в доме Облонских

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!
Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное. Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя! Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Мы ввели два произведения векторов — скалярное и векторное.
Конечно, смешивать их ни в коем случае нельзя!
Именно этим мы и займемся в сегодняшней лекции: мы смешаем скалярное и векторное произведения и посмотрим, что из этого выйдет.

Определение

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Смешанное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ обозначается $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

- Как и в случае скалярного произведения, результатом смешанного произведения является число.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$.

Критерий компланарности векторов

Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от одной точки. Тогда они будут лежать в некоторой плоскости. Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален этой плоскости, а значит, и вектору $\vec{c}$. Следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$.

Достаточность. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то компланарность векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна. Пусть теперь $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Будем считать, что вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от одной и той же точки. Пусть $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$. Это означает, что $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Следовательно, вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$. Но вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогонален плоскости σ, образованной векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поскольку $\vec{c}$ ортогонален этому вектору, то он лежит в σ. А это означает, что вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. $\square$

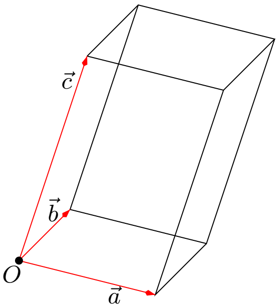
Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)

Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

Теорема (геометрический смысл смешанного произведения)

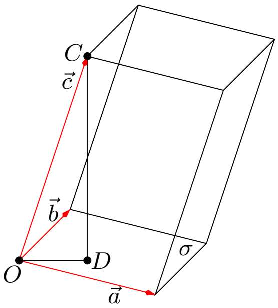
Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен модулю их смешанного произведения.

Доказательство. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — три некомпланарных вектора. Предположим сначала, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рисунок на следующем слайде.



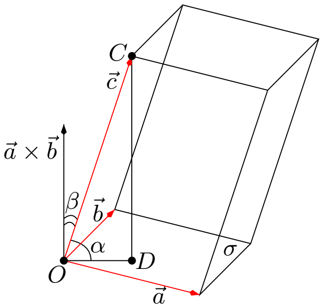
Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O.



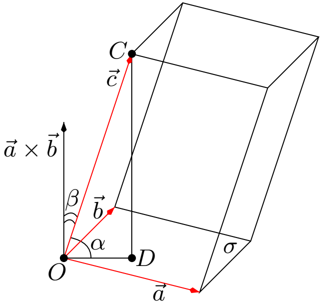
Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O. Пусть точка C такова, что $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, а D — проекция точки C на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которую мы обозначим через σ.



Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O. Пусть точка C такова, что $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, а D — проекция точки C на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которую мы обозначим через σ. Угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью σ обозначим через α, а угол между векторами $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ — через β.

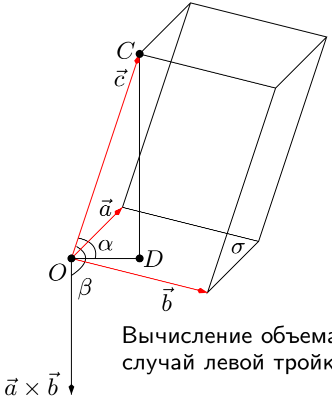


Вычисление объема параллелепипеда, случай правой тройки

Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от некоторой точки O. Пусть точка C такова, что $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, а D — проекция точки C на плоскость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которую мы обозначим через σ. Угол между вектором $\vec{c}$ и плоскостью σ обозначим через α, а угол между векторами $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ — через β. Учитывая, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ и потому $\sin\alpha=\cos\beta$, и используя геометрический смысл векторного произведения, имеем

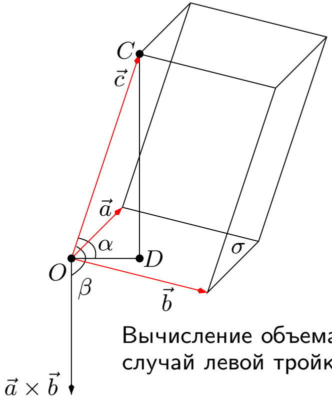
$$V=S_{\text{осн}}\cdot h=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|CD|=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\sin\alpha=$$
$$=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\vec{c}\,|\cdot\cos\beta=(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Пусть теперь тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. Тогда $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок), откуда $\sin\alpha = -\cos\beta$.



Вычисление объема параллелепипеда, случай левой тройки

Пусть теперь тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. Тогда $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ (см. рисунок), откуда $\sin\alpha = -\cos\beta$.



Вычисление объема параллелепипеда, случай левой тройки

Имеем

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |CD| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin\alpha =$$
$$= -|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\beta = -(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. $\square$

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. $\square$

Из доказательства теоремы вытекает важное следствие:

Замечание об ориентации тройки векторов

Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.

Поскольку объем параллелепипеда — положительное число, получаем, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V > 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая, и $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -V < 0$, если тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ левая. В любом случае $V = |\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|$. $\square$

Из доказательства теоремы вытекает важное следствие:

Замечание об ориентации тройки векторов

Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда смешанное произведение этих векторов больше нуля, и левой тогда и только тогда, когда оно меньше нуля.

Именно поэтому правая тройка векторов называется положительно ориентированной, а левая – отрицательно ориентированной.

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a}\,)\vec{b}\vec{c}=\vec{a}(t\vec{b}\,)\vec{c}=\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}\,)=t(\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,)$

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a}\,)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b}\,)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\,\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
3) $(\,\vec{a} + \vec{b}\,)\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*)

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*)

Свойства смешанного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{d}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$;
2) $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$;
3) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*);
5) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по третьему аргументу*).

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. □

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. □

Заметим, что из равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ вытекает своего рода «ассоциативность»:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Действительно, левая часть по определению равна $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а так как скалярное произведение коммутативно, правая часть есть $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Доказательство свойства 1). Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ имеют одну и ту же ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. В силу теоремы о геометрическом смысле смешанного произведения смешанные произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$ либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, либо оба равны объему этого параллелепипеда, взятому со знаком минус, и потому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
Упорядоченные тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ имеют разную ориентацию и определяют один и тот же параллелепипед. Поэтому одно из смешанных произведений $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ и $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$ равно объему этого параллелепипеда, взятому со знаком плюс, а другое — объему того же параллелепипеда, взятому со знаком минус. Отсюда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.
Остальные равенства из свойства 1) доказываются аналогично. □

Заметим, что из равенства $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$ вытекает своего рода «ассоциативность»:

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}).$$

Действительно, левая часть по определению равна $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а так как скалярное произведение коммутативно, правая часть есть $(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.
Итак, в выражении $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ на самом деле не важно, какие из векторов перемножаются векторно, а какие скалярно. Это оправдывает симметрию в обозначении для смешанного произведения.

Доказательство свойства 2). Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\,\vec{a} \times \vec{b}\,)(t\vec{c}) = t\big((\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{c}\big) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Доказательство свойства 2). Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{c}) = t\big((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}\big) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Используя это равенство и свойство 1) смешанного умножения, имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t \cdot \vec{b}\vec{c}\vec{a} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Доказательство свойства 2). Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})(t\vec{c}) = t\big((\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}\big) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $\vec{a}\vec{b}(t\vec{c}) = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Используя это равенство и свойство 1) смешанного умножения, имеем

$$(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}(t\vec{a}) = t \cdot \vec{b}\vec{c}\vec{a} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Таким образом, $(t\vec{a})\vec{b}\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Равенство $\vec{a}(t\vec{b})\vec{c} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$ проверяется аналогично предыдущему. $\square$

Доказательство свойств 3)–5) смешанного умножения

Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано. $\square$

Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано. $\square$

Используя свойства 1) и 5) смешанного умножения, имеем

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\vec{d}\vec{a} + \vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Свойство 3) доказано.

Используя свойства скалярного умножения, имеем

$$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} + (\vec{a}\times\vec{b})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}.$$

Свойство 5) доказано. $\square$

Используя свойства 1) и 5) смешанного умножения, имеем

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{c}\vec{d}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\vec{d}\vec{a} + \vec{c}\vec{d}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}.$$

Свойство 3) доказано. Свойство 4) доказывается аналогично. $\square$

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано.

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то $(t\vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}\,) = t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)$.

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то $(t\vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}\,) = t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)$.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((t\vec{a}\,) \times \vec{b}\,\big)\vec{x} = (t\vec{a}\,)\vec{b}\vec{x} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{x} = t \cdot \big((\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{x}\,\big) = \big(t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\big)\vec{x}.$$

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то $(t\vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}\,) = t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)$.
Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((t\vec{a}\,) \times \vec{b}\,\big)\vec{x} = (t\vec{a}\,)\vec{b}\vec{x} = t \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{x} = t \cdot \big((\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\vec{x}\,\big) = \big(t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\big)\vec{x}.$$

Таким образом, $\big((t\vec{a}\,) \times \vec{b}\,\big)\vec{x} = \big(t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)\big)\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. В силу ослабленного закона сокращения для скалярного умножения имеем $(t\vec{a}\,) \times \vec{b} = t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)$. Аналогично проверяется, что $\vec{a} \times (t\vec{b}\,) = t(\,\vec{a} \times \vec{b}\,)$.

Скаляры можно выносить за знак векторного произведения – доказательство

Свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то $(t\vec{a}\,)\times\vec{b} = \vec{a}\times(t\vec{b}\,) = t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)$.
Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 2) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((t\vec{a}\,)\times\vec{b}\,\big)\vec{x} = (t\vec{a}\,)\vec{b}\vec{x} = t\cdot\vec{a}\vec{b}\vec{x} = t\cdot\big((\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\vec{x}\,\big) = \big(t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\big)\vec{x}.$$

Таким образом, $\big((t\vec{a}\,)\times\vec{b}\,\big)\vec{x} = \big(t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)\big)\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. В силу ослабленного закона сокращения для скалярного умножения имеем $(t\vec{a}\,)\times\vec{b} = t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)$. Аналогично проверяется, что $\vec{a}\times(t\vec{b}\,) = t(\,\vec{a}\times\vec{b}\,)$.
Итак, скаляры можно выносить за знак векторного произведения. $\square$

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано.

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x} = \vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x} =$$
$$= (\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x} = (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Таким образом, $((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Таким образом, $\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Итак, векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. □

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x}=\vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x}=$$
$$=(\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.$$

Таким образом, $\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Итак, векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. $\square$

Здесь проверена дистрибутивность по первому аргументу.

Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения – доказательство

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$((\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x} = \vec{a}\vec{c}\vec{x} + \vec{b}\vec{c}\vec{x} =$$
$$= (\vec{a} \times \vec{c})\vec{x} + (\vec{b} \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})\vec{x}.$$

Таким образом, $((\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c})\vec{x} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$. Итак, векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. $\square$

Здесь проверена дистрибутивность по первому аргументу. Мы отмечали, что дистрибутивность по второму аргументу следует из дистрибутивности по первому аргументу и антикоммутативности.

Как и в предыдущем случае, свойство из заголовка слайда было сформулировано в § 4, но не было там доказано. Оно состоит в том, что если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – произвольные вектора, то $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.
Пусть $\vec{x}$ – произвольный вектор. Используя свойство 3) смешанного умножения и свойства скалярного умножения, имеем

$$\begin{aligned}\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x} &= (\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{x} = \vec{a}\vec{c}\vec{x}+\vec{b}\vec{c}\vec{x} = \\ &= (\vec{a}\times\vec{c})\vec{x}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{x} = (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\big((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\big)\vec{x}=(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\vec{x}$ для всякого вектора $\vec{x}$. Используя ослабленный закон сокращения для скалярного умножения, имеем $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Итак, векторное произведение дистрибутивно относительно сложения. $\square$

Здесь проверена дистрибутивность по первому аргументу. Мы отмечали, что дистрибутивность по второму аргументу следует из дистрибутивности по первому аргументу и антикоммутативности. Легко понять, что можно и дистрибутивность по второму аргументу доказывать с помощью того же приема, не задействуя антикоммутативность.

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора. По определению векторного произведения векторный квадрат любого вектора равен $\vec{0}$, откуда

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}.$$

Пользуясь дистрибутивностью векторного произведения относительно сложения, можно дать поучительное чисто алгебраическое свойство антикоммутативности векторного произведения.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора. По определению векторного произведения векторный квадрат любого вектора равен $\vec{0}$, откуда

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{0}.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

Но первое и последнее слагаемое равны $\vec{0}$, откуда $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}=\vec{0}$, т.е. $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$.

Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе.

Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю.

Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю. Используя этот факт и свойства смешанного умножения, получаем

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3)$$

Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю. Используя этот факт и свойства смешанного умножения, получаем

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) =$$
$$= (x_1y_2z_3) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2) \cdot \vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3) \cdot \vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 +$$
$$+ (x_2y_3z_1) \cdot \vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2) \cdot \vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1) \cdot \vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1 .$$

Вычисление смешанного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю. Используя этот факт и свойства смешанного умножения, получаем

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) =$$
$$= (x_1y_2z_3)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 +$$
$$+ (x_2y_3z_1)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1.$$

Используя свойство 1) смешанного умножения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис пространства, а (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в этом базисе. Из критерия компланарности векторов вытекает, что смешанное произведение трех векторов, два из которых равны, равно нулю. Используя этот факт и свойства смешанного умножения, получаем

$$\begin{aligned}\vec{x}\vec{y}\vec{z} &= (x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3)(y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + y_3\vec{b}_3)(z_1\vec{b}_1 + z_2\vec{b}_2 + z_3\vec{b}_3) = \\ &= (x_1y_2z_3)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 + (x_1y_3z_2)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_3\vec{b}_2 + (x_2y_1z_3)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_1\vec{b}_3 + \\ &+ (x_2y_3z_1)\cdot\vec{b}_2\vec{b}_3\vec{b}_1 + (x_3y_1z_2)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_1\vec{b}_2 + (x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_3\vec{b}_2\vec{b}_1.\end{aligned}$$

Используя свойство 1) смешанного умножения, последнее выражение можно переписать в виде

$$(x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1)\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как определитель 3-го порядка, в котором по строкам записаны координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Следовательно,

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3.$$

В качестве следствия получаем

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3), $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ *и* (z_1, z_2, z_3) *— координаты векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *соответственно в некотором базисе* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. *Вектора* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

В качестве следствия получаем

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3), $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ *и* (z_1, z_2, z_3) *— координаты векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *соответственно в некотором базисе* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. *Вектора* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$.

В качестве следствия получаем

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3), $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ *и* (z_1, z_2, z_3) *— координаты векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *соответственно в некотором базисе* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. *Вектора* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$ влечет, что $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$.

В качестве следствия получаем

Замечание о координатах компланарных векторов

Пусть (x_1, x_2, x_3), $(y_1,\ y_2,\ y_3)$ *и* (z_1, z_2, z_3) *— координаты векторов* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *соответственно в некотором базисе* $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. *Вектора* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *и* $\vec{z}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Из определения базиса и критерия компланарности векторов вытекает, что $\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 \neq 0$. Формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$ влечет, что $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$. Остается сослаться на критерий компланарности. $\square$

Вычисление смешанного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$, и потому

$$\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\vec{b}_3 = \vec{b}_3\vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Вычисление смешанного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$, и потому

$$\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\vec{b}_3 = \vec{b}_3\vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$ принимает совсем простой вид:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Если базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный, то $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \vec{b}_3$, и потому

$$\vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3 = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\vec{b}_3 = \vec{b}_3\vec{b}_3 = |\vec{b}_3|^2 = 1.$$

Поэтому в данном случае формула $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{b}_1\vec{b}_2\vec{b}_3$ принимает совсем простой вид:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе. Используя смешанное произведение, можно

1) вычислить объем V параллелепипеда, построенного на $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$:

$$V = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе. Используя смешанное произведение, можно

1) вычислить объем V параллелепипеда, построенного на $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$:

$$V = \text{abs}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

2) определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ положительно (отрицательно) ориентирована тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0$ (соответственно $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0$.)

Пусть (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) и (z_1, z_2, z_3) – координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ соответственно в некотором правом ортонормированном базисе.
Используя смешанное произведение, можно

1) вычислить объем V параллелепипеда, построенного на $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$:

$$V = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix};$$

2) определить ориентацию тройки векторов $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ положительно (отрицательно) ориентирована тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} > 0$ (соответственно $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} < 0$.)

Заключаем, что геометрический смысл определителя 3-го порядка – *ориентированный объем* параллелепипеда.