Тема I: Векторная алгебра

§I.4. Векторное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет

Институт естественных наук и математики

кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Ориентация тройки векторов

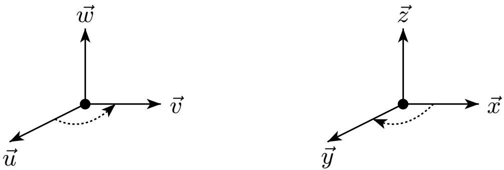
Определение

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ называется *правой*, если из конца вектора $\vec{w}$ поворот от $\vec{u}$ к $\vec{v}$ по наименьшему углу выглядит происходящим против часовой стрелки, и *левой* – в противном случае. Правую тройку векторов называют также *положительно ориентированной*, а левую – *отрицательно ориентированной*.

- Термины «правая» и «левая» для троек векторов имеют «антропное» происхождение: если смотреть с конца большого пальца на поворот от указательного пальца к среднему, то на правой руке этот поворот будет происходить против часовой стрелки, а на левой – по часовой стрелке.

Ориентация тройки векторов (2)

На рисунке тройка $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ является правой, а тройка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – левой (имеется в виду, что вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{x}$, $\vec{y}$ расположены в горизонтальной плоскости, а вектора $\vec{w}$ и $\vec{z}$ направлены вверх).



Правая (слева) и левая (справа) тройки векторов

Несложно убедиться в том, что *перестановка двух соседних векторов в тройке меняет ее ориентацию на противоположную, а циклическая перестановка не меняет*. (*Циклическая перестановка* — это переход от тройки $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ к тройке $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ или к тройке $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$.)

Определение

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

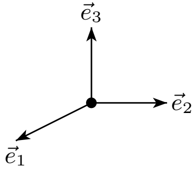
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, т.е. длина векторного произведения неколлинеарных векторов равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах,
2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$,
3) тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

Векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулевому вектору. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Пункт 2) из определения векторного произведения определяет прямую, вдоль которой направлен вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ (это прямая, перпендикулярная к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$), но не указывает, в какую сторону вдоль этой прямой направлен этот вектор. Для того, чтобы однозначно указать направление вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, и нужен пункт 3) определения.

Пример: векторные произведения векторов правого ортонормированного базиса

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – *правый ортонормированный базис пространства*, т.е. ортонормированный базис, являющийся правой тройкой векторов:



Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1.$$

Первое равенство вытекает из того, что $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$, тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правая и

$$|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = 1 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1 = |\vec{e}_3|.$$

Два других равенства проверяются аналогично, надо только учесть, что тройка $(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)$ – левая, а тройка $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ – правая.

Свойства векторного умножения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (*антикоммутативность*);
2) $(t\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (t\vec{b}) = t(\vec{a} \times \vec{b})$;
3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по первому аргументу*);
4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов по второму аргументу*).

- Из свойств сложения и векторного умножения векторов видно, что множество всех векторов с этими двумя операциями является кольцом. Это кольцо некоммутативно и неассоциативно. (Оно принадлежит классу так называемых *колец Ли*). Это единственный пример неассоциативного кольца, возникающий в нашем курсе.

Свойства 1) и 4) будут доказаны на следующем слайде, а свойства 2) и 3) — в следующем параграфе.

Доказательство свойства 1). Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Поскольку $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$, имеем

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = |\vec{b} \times \vec{a}|.$$

Как $\vec{a} \times \vec{b}$, так и $\vec{b} \times \vec{a}$ ортогональны векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, откуда $\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{b} \times \vec{a}$. Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ правая (по определению векторного произведения), а потому тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b})$ левая (перестановка соседних векторов меняет ориентацию тройки). Поскольку тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{b} \times \vec{a})$ – правая, видим, что $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b} \times \vec{a}$. Итак, $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ – обратно коллинеарные вектора одинаковой длины, т.е. противоположные вектора. $\square$

Свойство 4) следует из свойств 1) и 3). В самом деле,

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}) = -(\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

$\square$

Вычисление векторного произведения в координатах (в произвольном базисе)

Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – некоторый базис, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) – координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно.
Применяя свойства 2)–4) векторного умножения, имеем

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) = \\ = (x_1y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + (x_1y_2) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \\ + (x_2y_1) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + (x_2y_2) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + (x_2y_3) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + \\ + (x_3y_1) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + (x_3y_2) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + (x_3y_3) \cdot \vec{e}_3 \times \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Используя антикоммутативность векторного умножения, можно переписать это равенство в виде

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3 - x_3y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3.$$

Как и в случае со скалярным произведением, эта формула не позволяет вычислить векторное произведение без знания «таблицы умножения» базисных векторов.

Вычисление векторного произведения в координатах (в правом ортонормированном базисе)

Предположим теперь, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правый ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

и формула

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_1y_2 - x_2y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (x_1y_3 - x_3y_1) \cdot \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + (x_2y_3 - x_3y_2) \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3.$$

приобретает вид

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3.$$

Правую часть этого равенства удобно представлять как результат разложения по первой строке символического определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

С учетом этой договоренности имеем

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – правый ортонормированный базис, а (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) — координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в этом базисе соответственно. Используя векторное произведение, можно вычислить площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$S = \sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2};$$

Пусть даны координаты (x_1, x_2) и (y_1, y_2) неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и соответственно $\vec{y}$ в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ той плоскости, где лежат $\vec{x}$ и $\vec{y}$. Возьмем $\vec{e}_3 := \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$; тогда $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ – правый ортонормированный базис пространства, в котором вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют координаты $(x_1, x_2, 0)$ и $(y_1, y_2, 0)$ соответственно. Подставляя эти координаты в формулу для S, получаем

$$S = \sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2} = \text{abs}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(символом abs мы обозначили абсолютную величину определителя). Заключаем, что геометрический смысл определителя 2-го порядка – *ориентированная площадь* параллелограма.