

# Тема I: Векторная алгебра

## § 1.2. Скалярное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

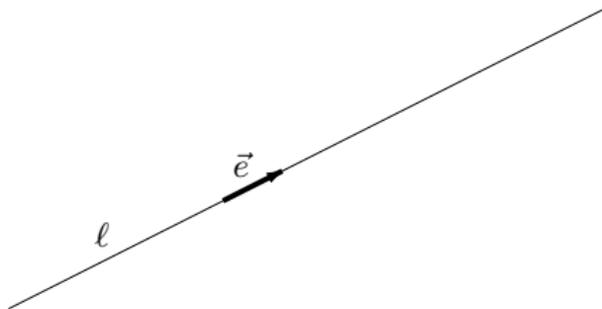
Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Неформально, ось — это направленная прямая.

### Определение

Прямая называется *осью*, если на ней зафиксирован ненулевой вектор, называемый *направляющим вектором* этой оси.



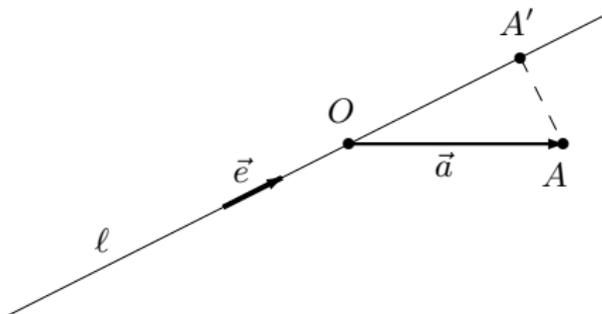
Ось  $l$  с направляющим вектором  $\vec{e}$

Зафиксируем некоторую ось  $\ell$  с направляющим вектором  $\vec{e}$ .

Пусть  $\vec{a}$  – вектор. Его *проекцией на ось  $\ell$*  называется число, обозначаемое  $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}$  и определяемое следующим образом.

Если  $\vec{a} \perp \ell$ , то  $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} := 0$ .

Если  $\vec{a} \not\perp \ell$ , отложим вектор  $\vec{a}$  от какой-нибудь точки  $O$  прямой  $\ell$ .



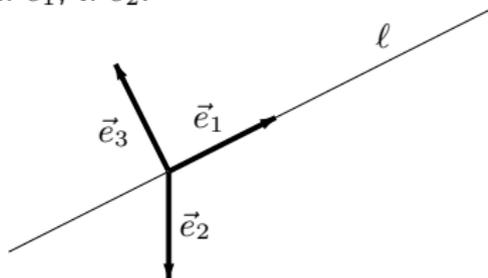
Пусть  $A'$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  (конца вектора  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ) на прямую  $\ell$ . Тогда  $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} := \begin{cases} |OA'|, & \text{если } \overrightarrow{OA'} \uparrow\uparrow \vec{e}, \\ -|OA'|, & \text{если } \overrightarrow{OA'} \uparrow\downarrow \vec{e}. \end{cases}$

## Свойства проекций

Если  $\ell$  – ось с направляющим вектором  $\vec{e}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – произвольные вектора, а  $t$  – произвольное число, то:

- 1)  $\text{пр}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{e}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{e}}\vec{b}$ ;
- 2)  $\text{пр}_{\vec{e}}(t\vec{a}) = t \text{пр}_{\vec{e}}\vec{a}$ .

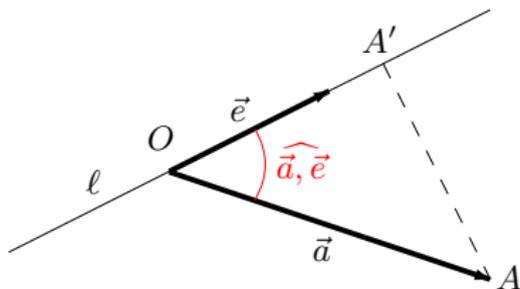
Проще всего доказать эти свойства, если ввести базис  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , в котором  $\vec{e}_1$  – орт вектора  $\vec{e}$ ,  $\vec{e}_2$  – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный  $\vec{e}_1$ , а  $\vec{e}_3$  – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный и  $\vec{e}_1$ , и  $\vec{e}_2$ .



Тогда  $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{a}$  есть не что иное, как первая координата вектора  $\vec{a}$  в этом базисе, и свойства 1)–2) следуют из соответствующих свойств координат.

## Еще одно свойство проекций

Угол между осью  $\ell$  и вектором  $\vec{a}$  – это угол между направляющим вектором оси и  $\vec{a}$ .



Тогда легко проверить, что  $\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$ .

Действительно, если  $\vec{a} \perp \ell$ , то  $\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = 0$ , но и  $|\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}}) = 0$ .

Если  $\vec{a} \not\perp \ell$ , то  $|OA'|$ , т.е. модуль проекции, — длина катета прямоугольного треугольника  $OAA'$ , длина гипотенузы которого есть  $|\vec{a}|$ , а знак проекции  $+$ , если  $\widehat{\vec{a}, \vec{e}}$  острый, и  $-$ , если  $\widehat{\vec{a}, \vec{e}}$  тупой, т.е. совпадает со знаком  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$ .

## Определение

*Скалярным произведением* ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается через  $\vec{a}\vec{b}$ .

- Скалярное произведение не является операцией на множестве всех векторов в смысле определения операции из курса «Введение в математику», так как результатом является не вектор, а число.

Альтернативные обозначения  $(\vec{a}, \vec{b})$ ;  $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$  (*обозначение Дирака*)

В силу определения, если вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — ненулевые, то

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

## Связь скалярного произведения и проекций

Если вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — ненулевые, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

## Определение

Скалярное произведение вектора  $\vec{a}$  на себя называется *скалярным квадратом* вектора  $\vec{a}$  и обозначается через  $\vec{a}^2$ .

Поскольку  $(\widehat{\vec{a}, \vec{a}}) = 0$ , а  $\cos 0 = 1$ , имеем

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Иными словами,

- *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

## Определение

Ненулевые вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.

Ортогональность векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается так:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

## Критерий ортогональности векторов

Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны тогда и только тогда, когда  $\vec{a}\vec{b} = 0$ .

*Доказательство. Необходимость.* Если хотя бы один из векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  нулевой, то  $\vec{a}\vec{b} = 0$  по определению. Если же  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ , то из ортогональности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вытекает, что  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$ , и потому  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ . Но тогда вновь  $\vec{a}\vec{b} = 0$  по определению.

*Достаточность.* Если  $\vec{a}\vec{b} = 0$ , то либо  $|\vec{a}| = 0$  (т. е.  $\vec{a} = \vec{0}$ ), либо  $|\vec{b}| = 0$  (т. е.  $\vec{b} = \vec{0}$ ), либо  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ . Во всех трех случаях  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . □

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

## Замечание об острых и тупых углах

Угол между ненулевыми векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

- а) острый тогда и только тогда, когда  $\vec{a}\vec{b} > 0$ ;
- б) прямой тогда и только тогда, когда  $\vec{a}\vec{b} = 0$ ;
- в) тупой тогда и только тогда, когда  $\vec{a}\vec{b} < 0$ .

*Доказательство.* Пункт б) — это не что иное, как критерий ортогональности векторов.

Чтобы доказать пп. а) и в), заметим, что в силу формулы

$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$  знак косинуса угла между ненулевыми векторами совпадает со знаком их скалярного произведения. Остается учесть, что косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла отрицателен.  $\square$

## Свойства скалярного произведения

Если  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  — произвольные вектора, а  $t$  — произвольное число, то:

- 1)  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$  (скалярное произведение *коммутативно*);
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$  (скалярное произведение *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
- 3)  $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$ ;
- 4)  $\vec{a}\vec{a} \geq 0$ , причем  $\vec{a}\vec{a} = 0$  тогда и только тогда, когда  $\vec{a} = \vec{0}$ .

Свойство 1) очевидно, а свойство 4) следует из равенства  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ .

Равенство  $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$  очевидно, если  $\vec{c} = \vec{0}$ . Если же  $\vec{c} \neq \vec{0}$ , то можно применить свойство проекций:

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \cdot (\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

Свойство 3) проверяется аналогично.

Если  $x$ ,  $y$  и  $z$  — такие числа, что  $xz = yz$  и  $z \neq 0$ , то  $x = y$  (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства  $xz = yz$  справа на  $z^{-1}$ ). Это свойство называется **законом сокращения**.

На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  такие, что  $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$  и  $\vec{c} \neq \vec{0}$ , но  $\vec{a} \neq \vec{b}$ .

Действительно, пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — два различных вектора, а  $\vec{c}$  — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . В силу критерия ортогональности векторов  $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$ . Но  $\vec{a} \neq \vec{b}$ .

Тем не менее, имеет место следующее свойство скалярного произведения.

### Ослабленный закон сокращения для скалярного произведения

Если вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  таковы, что для любого вектора  $\vec{x}$  выполняется равенство  $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ , то  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$  для любого  $\vec{x}$ . Тогда  $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$ .

Поскольку вектор  $\vec{x}$  может быть любым, возьмем в качестве  $\vec{x}$  вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ . Получим равенство  $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ . По свойству 4) скалярного произведения отсюда следует, что  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ , т. е.  $\vec{a} = \vec{b}$ . □

Пусть вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют в базисе  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  координаты  $(t_1, t_2, t_3)$  и  $(s_1, s_2, s_3)$  соответственно. Используя свойства скалярного произведения, получаем, что

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} &= (t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3)(s_1\vec{c}_1 + s_2\vec{c}_2 + s_3\vec{c}_3) = \\ &= (t_1s_1)\vec{c}_1\vec{c}_1 + (t_1s_2)\vec{c}_1\vec{c}_2 + (t_1s_3)\vec{c}_1\vec{c}_3 + \\ &+ (t_2s_1)\vec{c}_2\vec{c}_1 + (t_2s_2)\vec{c}_2\vec{c}_2 + (t_2s_3)\vec{c}_2\vec{c}_3 + \\ &+ (t_3s_1)\vec{c}_3\vec{c}_1 + (t_3s_2)\vec{c}_3\vec{c}_2 + (t_3s_3)\vec{c}_3\vec{c}_3.\end{aligned}$$

Это выражение можно несколько упростить, воспользовавшись коммутативностью скалярного произведения, но оно все равно останется громоздким и, главное, все равно не позволит вычислить скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  без дополнительной информации о скалярных произведениях базисных векторов.

## Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что  $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$  — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Поэтому формула из предыдущего слайда принимает вид

$$\vec{a}\vec{b} = t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3.$$

Иными словами,

- *в случае ортонормированного базиса скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

В частности,

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2.$$

Пусть  $(t_1, t_2, t_3)$  и  $(s_1, s_2, s_3)$  — координаты векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно

- 1) вычислить длину вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2};$$

- 2) вычислить косинус угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

в силу формулы  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ ;

- 3) определить, будет ли угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  острым, прямым или тупым: в силу замечания об острых и тупых углах этот угол
  - острый тогда и только тогда, когда  $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 > 0$ ;
  - прямой тогда и только тогда, когда  $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 = 0$ ;
  - тупой тогда и только тогда, когда  $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 < 0$ .

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости. В частности, если вектора плоскости  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты  $(t_1, t_2)$  и  $(s_1, s_2)$  соответственно, то

- $\vec{a}\vec{b} = t_1s_1 + t_2s_2$ ;
- $|\vec{a}| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$ ;
- $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1s_1 + t_2s_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$ ;
- $\vec{a} \perp \vec{b}$  тогда и только тогда, когда  $t_1s_1 + t_2s_2 = 0$ .