Тема I: Векторная алгебра

§I.2. Скалярное произведение векторов

Б.М.Верников М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Ось

Неформально, ось — это направленная прямая.

Неформально, ось — это направленная прямая.

Определение

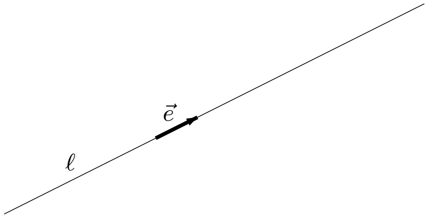
Прямая называется *осью*, если на ней зафиксирован ненулевой вектор, называемый *направляющим вектором* этой оси.

Ось

Неформально, ось — это направленная прямая.

Определение

Прямая называется *осью*, если на ней зафиксирован ненулевой вектор, называемый *направляющим вектором* этой оси.



Ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$

Зафиксируем некоторую ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$.

Зафиксируем некоторую ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$.

Пусть $\vec{a}$ – вектор. Его *проекцией на ось ℓ* называется число, обозначаемое $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$ и определяемое следующим образом.

Зафиксируем некоторую ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$.

Пусть $\vec{a}$ – вектор. Его *проекцией на ось ℓ* называется число, обозначаемое $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$ и определяемое следующим образом.

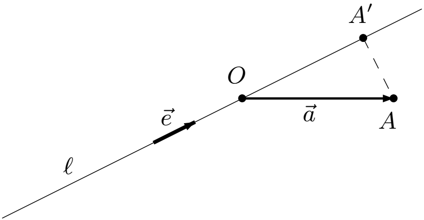
Если $\vec{a} \perp \ell$, то $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} := 0$.

Зафиксируем некоторую ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$.

Пусть $\vec{a}$ – вектор. Его *проекцией на ось ℓ* называется число, обозначаемое $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$ и определяемое следующим образом.

Если $\vec{a} \perp \ell$, то $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} := 0$.

Если $\vec{a} \not\perp \ell$, отложим вектор $\vec{a}$ от какой-нибудь точки O прямой ℓ.

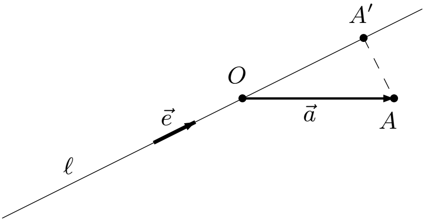


Зафиксируем некоторую ось ℓ с направляющим вектором $\vec{e}$.

Пусть $\vec{a}$ – вектор. Его *проекцией на ось ℓ* называется число, обозначаемое пр$_{\vec{e}}\,\vec{a}$ и определяемое следующим образом.

Если $\vec{a} \perp \ell$, то пр$_{\vec{e}}\,\vec{a} := 0$.

Если $\vec{a} \not\perp \ell$, отложим вектор $\vec{a}$ от какой-нибудь точки O прямой ℓ.



Пусть A' – основание перпендикуляра, опущенного из точки A (конца вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$) на прямую ℓ. Тогда пр$_{\vec{e}}\,\vec{a} := \begin{cases} |OA'|, & \text{если } \overrightarrow{OA'} \uparrow\uparrow \vec{e}, \\ -|OA'|, & \text{если } \overrightarrow{OA'} \uparrow\downarrow \vec{e}. \end{cases}$

Свойства проекций

Свойства проекций

Если ℓ *– ось с направляющим вектором* $\vec{e}$, $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– произвольные вектора, а* t *– произвольное число, то:*

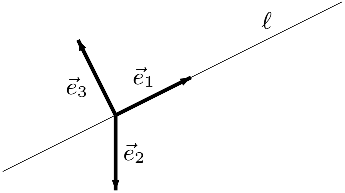
1) $\text{пр}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}$;
2) $\text{пр}_{\vec{e}}(t\vec{a}) = t\,\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$.

Свойства проекций

Если ℓ – ось с направляющим вектором $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то:

1) $\text{пр}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}$;
2) $\text{пр}_{\vec{e}}(t\vec{a}) = t\,\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$.

Проще всего доказать эти свойства, если ввести базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, в котором $\vec{e}_1$ – орт вектора $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный $\vec{e}_1$, а $\vec{e}_3$ – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный и $\vec{e}_1$, и $\vec{e}_2$.

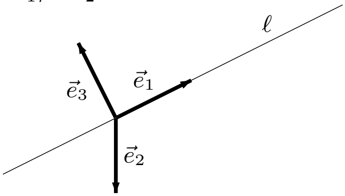


Свойства проекций

Если ℓ – ось с направляющим вектором $\vec{e}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные вектора, а t – произвольное число, то:

1) $\text{пр}_{\vec{e}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}$;
2) $\text{пр}_{\vec{e}}(t\vec{a}) = t\,\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$.

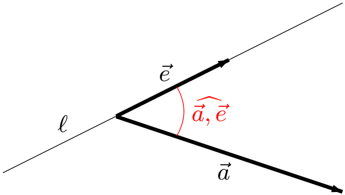
Проще всего доказать эти свойства, если ввести базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, в котором $\vec{e}_1$ – орт вектора $\vec{e}$, $\vec{e}_2$ – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный $\vec{e}_1$, а $\vec{e}_3$ – какой-то вектор единичной длины, перпендикулярный и $\vec{e}_1$, и $\vec{e}_2$.



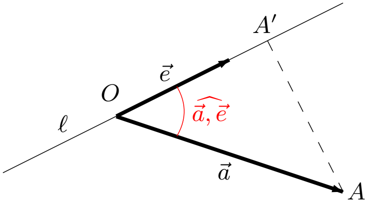
Тогда $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}$ есть не что иное, как первая координата вектора $\vec{a}$ в этом базисе, и свойства 1)–2) следуют из соответствующих свойств координат.

Еще одно свойство проекций

Угол между осью ℓ и вектором $\vec{a}$ – это угол между направляющим вектором оси и $\vec{a}$.

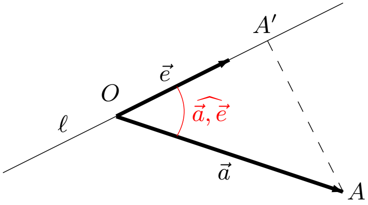


Угол между осью ℓ и вектором $\vec{a}$ – это угол между направляющим вектором оси и $\vec{a}$.



Тогда легко проверить, что $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

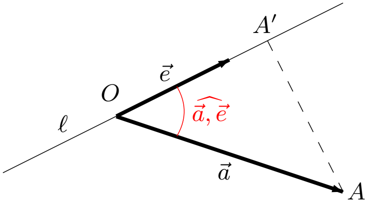
Угол между осью ℓ и вектором $\vec{a}$ – это угол между направляющим вектором оси и $\vec{a}$.



Тогда легко проверить, что $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

Действительно, если $\vec{a} \perp \ell$, то $\text{пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} = 0$, но и $|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}}) = 0$.

Угол между осью ℓ и вектором $\vec{a}$ – это угол между направляющим вектором оси и $\vec{a}$.



Тогда легко проверить, что пр$_{\vec{e}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

Действительно, если $\vec{a} \perp \ell$, то пр$_{\vec{e}}\,\vec{a} = 0$, но и $|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}}) = 0$.

Если $\vec{a} \not\perp \ell$, то $|OA'|$, т.е. модуль проекции, — длина катета прямоугольного треугольника OAA', длина гипотенузы которого есть $|\vec{a}|$, а знак проекции $+$, если $\widehat{\vec{a},\vec{e}}$ острый, и –, если $\widehat{\vec{a},\vec{e}}$ тупой, т.е. совпадает со знаком $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}})$.

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$.

Определение скалярного произведения векторов

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$.

- Скалярное произведение не является операцией на множестве всех векторов в смысле определения операции из курса «Введение в математику», так как результатом является не вектор, а число.

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$.

- Скалярное произведение не является операцией на множестве всех векторов в смысле определения операции из курса «Введение в математику», так как результатом является не вектор, а число.

Альтернативные обозначения $(\vec{a}, \vec{b})$; $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ (*обозначение Дирака*)

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$.

- Скалярное произведение не является операцией на множестве всех векторов в смысле определения операции из курса «Введение в математику», так как результатом является не вектор, а число.

Альтернативные обозначения $(\vec{a}, \vec{b})$; $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ (*обозначение Дирака*)

В силу определения, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые, то

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}.$$

Определение

Скалярным произведением ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор по определению равно 0. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$.

- Скалярное произведение не является операцией на множестве всех векторов в смысле определения операции из курса «Введение в математику», так как результатом является не вектор, а число.

Альтернативные обозначения $(\vec{a}, \vec{b})$; $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$ (*обозначение Дирака*)

В силу определения, если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые, то

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}.$$

Связь скалярного произведения и проекций

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\,\vec{a}\,| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\,\vec{b}\,| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}.$$

Определение

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$.

Определение

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$.

Поскольку $(\widehat{\vec{a},\vec{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, имеем

$$\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2.$$

Определение

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^{\,2}$.

Поскольку $(\widehat{\vec{a},\vec{a}}) = 0$, а $\cos 0 = 1$, имеем

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2.$$

Иными словами,

- *скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.*

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.
Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.
Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Критерий ортогональности векторов

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.
Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Критерий ортогональности векторов

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению.

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.
Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Критерий ортогональности векторов

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению. Если же $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то из ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вытекает, что $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$, и потому $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Но тогда вновь $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению.

Определение

Ненулевые вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если они лежат на перпендикулярных прямых. Нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.
Ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Критерий ортогональности векторов

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению. Если же $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то из ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вытекает, что $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$, и потому $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Но тогда вновь $\vec{a}\vec{b} = 0$ по определению.

Достаточность. Если $\vec{a}\vec{b} = 0$, то либо $|\vec{a}| = 0$ (т. е. $\vec{a} = \vec{0}$), либо $|\vec{b}| = 0$ (т. е. $\vec{b} = \vec{0}$), либо $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Во всех трех случаях $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\square$

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

Замечание об острых и тупых углах

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) *острый тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} > 0$;*

б) *прямой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$;*

в) *тупой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} < 0$.*

Скалярное произведение и острые и тупые углы между векторами

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

Замечание об острых и тупых углах

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) *острый тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} > 0$;*

б) *прямой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$;*

в) *тупой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} < 0$.*

Доказательство. Пункт б) — это не что иное, как критерий ортогональности векторов.

Критерий ортогональности векторов можно рассматривать как часть следующего более общего наблюдения.

Замечание об острых и тупых углах

Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) *острый тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} > 0$;*

б) *прямой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = 0$;*

в) *тупой тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} < 0$.*

Доказательство. Пункт б) — это не что иное, как критерий ортогональности векторов.
Чтобы доказать пп. а) и в), заметим, что в силу формулы $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|}$ знак косинуса угла между ненулевыми векторами совпадает со знаком их скалярного произведения. Остается учесть, что косинус острого угла положителен, а косинус тупого угла отрицателен. $\square$

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *— произвольные вектора, а* t *— произвольное число, то:*

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *— произвольные вектора, а* t *— произвольное число, то:*

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*);

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$, *причем* $\vec{a}\vec{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$.

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ *(скалярное произведение коммутативно);*
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ *(скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов);*
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$*;*
4) $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$*, причем* $\vec{a}\vec{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$*.*

Свойство 1) очевидно, а свойство 4) следует из равенства $\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2$.

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение* *коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение* *дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$, *причем* $\vec{a}\vec{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$.

Свойство 1) очевидно, а свойство 4) следует из равенства $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Равенство $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ очевидно, если $\vec{c} = \vec{0}$. Если же $\vec{c} \neq \vec{0}$, то можно применить свойство проекций:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}| \cdot \left(\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right) = |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + |\vec{c}| \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

Свойства скалярного произведения

Если $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные вектора, а t — произвольное число, то:

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (*скалярное произведение коммутативно*);
2) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ (*скалярное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов*);
3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$;
4) $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$, *причем* $\vec{a}\vec{a} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a} = \vec{0}$.

Свойство 1) очевидно, а свойство 4) следует из равенства $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$.

Равенство $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ очевидно, если $\vec{c} = \vec{0}$. Если же $\vec{c} \neq \vec{0}$, то можно применить свойство проекций:

$$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = |\vec{c}|\cdot \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\cdot\left(\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}\right) = |\vec{c}|\cdot\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|\cdot\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}.$$

Свойство 3) проверяется аналогично.

Если x, y и z — такие числа, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *закономсокращения*.

Ослабленный закон сокращения

Если x, y и z — такие числа, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *законом сокращения*.

На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Если x, y и z — такие числа, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *закономсокращения*.

На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Действительно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два различных вектора, а $\vec{c}$ — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В силу критерия ортогональности векторов $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{b}$.

Если x, y и z — такие числа, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *законом сокращения*.
На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$.
Действительно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два различных вектора, а $\vec{c}$ — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В силу критерия ортогональности векторов $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{b}$.
Тем не менее, имеет место следующее свойство скалярного произведения.

Ослабленный закон сокращения для скалярного произведения

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Если x, y и z — такие числа, что $xz = yz$ и $z \neq 0$, то $x = y$ (для того, чтобы убедиться в этом, достаточно умножить обе части равенства $xz = yz$ справа на z^{-1}). Это свойство называется *законом сокращения*.
На множестве всех векторов закон сокращения места не имеет: существуют вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ и $\vec{c} \neq \vec{0}$, но $\vec{a} \neq \vec{b}$. Действительно, пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два различных вектора, а $\vec{c}$ — вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В силу критерия ортогональности векторов $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0$. Но $\vec{a} \neq \vec{b}$.
Тем не менее, имеет место следующее свойство скалярного произведения.

Ослабленный закон сокращения для скалярного произведения

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ таковы, что для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\vec{a}\vec{x} = \vec{b}\vec{x}$ для любого $\vec{x}$. Тогда $(\vec{a} - \vec{b})\vec{x} = 0$. Поскольку вектор $\vec{x}$ может быть любым, возьмем в качестве $\vec{x}$ вектор $\vec{a} - \vec{b}$. Получим равенство $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$. По свойству 4) скалярного произведения отсюда следует, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$. $\square$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $(\,\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\,)$ координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно. Используя свойства скалярного произведения, получаем, что

$$\vec{a}\vec{b} = (t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3)(s_1\vec{c}_1 + s_2\vec{c}_2 + s_3\vec{c}_3)$$

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно. Используя свойства скалярного произведения, получаем, что

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} = (t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3)(s_1\vec{c}_1 + s_2\vec{c}_2 + s_3\vec{c}_3) = \\ = (t_1 s_1)\vec{c}_1\vec{c}_1 + (t_1 s_2)\vec{c}_1\vec{c}_2 + (t_1 s_3)\vec{c}_1\vec{c}_3 + \\ + (t_2 s_1)\vec{c}_2\vec{c}_1 + (t_2 s_2)\vec{c}_2\vec{c}_2 + (t_2 s_3)\vec{c}_2\vec{c}_3 + \\ + (t_3 s_1)\vec{c}_3\vec{c}_1 + (t_3 s_2)\vec{c}_3\vec{c}_2 + (t_3 s_3)\vec{c}_3\vec{c}_3.\end{aligned}$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в базисе $(\,\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\,)$ координаты (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) соответственно. Используя свойства скалярного произведения, получаем, что

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} &= (t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3)(s_1\vec{c}_1 + s_2\vec{c}_2 + s_3\vec{c}_3) = \\ &= (t_1s_1)\vec{c}_1\vec{c}_1 + (t_1s_2)\vec{c}_1\vec{c}_2 + (t_1s_3)\vec{c}_1\vec{c}_3 + \\ &+ (t_2s_1)\vec{c}_2\vec{c}_1 + (t_2s_2)\vec{c}_2\vec{c}_2 + (t_2s_3)\vec{c}_2\vec{c}_3 + \\ &+ (t_3s_1)\vec{c}_3\vec{c}_1 + (t_3s_2)\vec{c}_3\vec{c}_2 + (t_3s_3)\vec{c}_3\vec{c}_3.\end{aligned}$$

Это выражение можно несколько упростить, воспользовавшись коммутативностью скалярного произведения, но оно все равно останется громоздким и, главное, все равно не позволит вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ без дополнительной информации о скалярных произведениях базисных векторов.

Вычисление скалярного произведения в координатах (2)

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны.

Вычисление скалярного произведения в координатах (2)

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Поэтому формула из предыдущего слайда принимает вид

$$\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3.$$

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Поэтому формула из предыдущего слайда принимает вид

$$\vec{a}\vec{b} = t_1s_1 + t_2s_2 + t_3s_3.$$

Иными словами,

- *в случае ортонормированного базиса скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

Определение

Базис называется *ортогональным*, если его вектора попарно ортогональны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны единице.

Предположим, что $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ — ортонормированный базис. Тогда

$$\vec{c}_1\vec{c}_2 = \vec{c}_2\vec{c}_1 = \vec{c}_1\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_3 = \vec{c}_3\vec{c}_2 = 0 \text{ и } \vec{c}_1\vec{c}_1 = \vec{c}_2\vec{c}_2 = \vec{c}_3\vec{c}_3 = 1.$$

Поэтому формула из предыдущего слайда принимает вид

$$\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3.$$

Иными словами,

- *в случае ортонормированного базиса скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

В частности,

$$\vec{a}^{\,2} = |\,\vec{a}\,|^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2.$$

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе.

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно

1) вычислить длину вектора:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2};$$

Приложения скалярного произведения

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно

1) вычислить длину вектора:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2};$$

2) вычислить косинус угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

в силу формулы $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}$;

Пусть (t_1, t_2, t_3) и (s_1, s_2, s_3) — координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно в некотором ортонормированном базисе. Пользуясь скалярным произведением, можно

1) вычислить длину вектора:

$$|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2};$$

2) вычислить косинус угла между ненулевыми векторами:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$$

в силу формулы $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,|}$;

3) определить, будет ли угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острым, прямым или тупым: в силу замечания об острых и тупых углах этот угол
   - острый тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 > 0$;
   - прямой тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 = 0$;
   - тупой тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 + t_3 s_3 < 0$.

Вычисление скалярного произведения в координатах (на плоскости)

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости.

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости. В частности, если вектора плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

- $\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2$;

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости. В частности, если вектора плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

- $\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2$;
- $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$;

Вычисление скалярного произведения в координатах (на плоскости)

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости. В частности, если вектора плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

- $\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2$;
- $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$;
- $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$;

Все сказанное на двух предыдущих слайдах применимо (с очевидными модификациями) к векторам плоскости. В частности, если вектора плоскости $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют в ортонормированном базисе этой плоскости координаты (t_1, t_2) и (s_1, s_2) соответственно, то

- $\vec{a}\vec{b} = t_1 s_1 + t_2 s_2$;
- $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$;
- $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{t_1 s_1 + t_2 s_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}$;
- $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $t_1 s_1 + t_2 s_2 = 0$.