Тема I: Векторная алгебра

§I.1. Линейные операции над векторами

Б.М.Верников   М.В.Волков

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Материал этого параграфа в основном известен из школьного курса математики. Однако есть и существенные отличия от изложения этого материала в школе. Одно из них состоит в определении понятия вектора.

Определение

Отрезок AB называется *направленным*, если указано, какая из точек A или B является его началом, а какая — концом. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается через $\overrightarrow{AB}$.
Длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ обозначается через $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
Если $A = B$, то отрезок называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$.
Направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* к $\overrightarrow{AB}$.

- В школьном курсе математики именно направленные отрезки называют векторами, но мы будем различать эти понятия. Определение вектора будет дано чуть позднее.

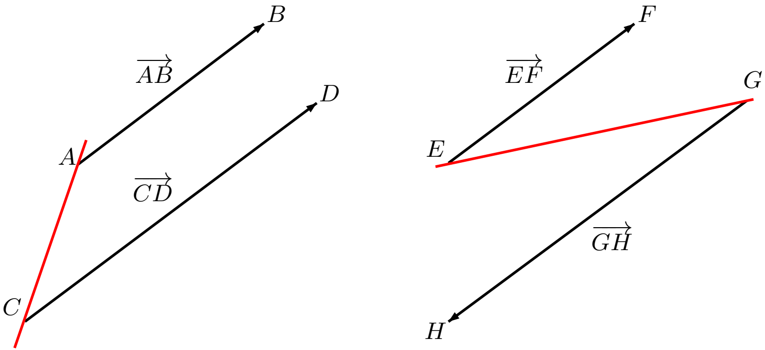
Сонаправленные, противонаправленные и коллинеарные отрезки

Определения

Ненулевые направленные отрезки, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.
Коллинеарные отрезки называются *сонаправленными* или *прямо коллинеарными*, если они направлены в одну и ту же сторону, и *противонаправленными* или *обратно коллинеарными* в противном случае.
Нулевой направленный отрезок по определению считается коллинеарным, сонаправленным и противонаправленным любому направленному отрезку.
Коллинеарность направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ обозначают $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, их сонаправленность – $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, а противонаправленность – $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

- Термин «коллинеарность» происходит от латинских корней «col» (придает значение совместности) и «linearis» (линейный).

Коллинеарные направленные отрезки — иллюстрация



Прямо коллинеарные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — концы отрезков лежат по одну сторону от прямой, проходящей через их начала.

Обратно коллинеарные отрезки $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{GH}$ — концы отрезков лежат по разные стороны от прямой, проходящей через их начала.

Введем на множестве всех направленных отрезков бинарное отношение α: $\overrightarrow{AB}\,\alpha\,\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. Очевидно, что отношение α рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. является отношением эквивалентности.

Определение

Вектором называется класс отношения эквивалентности α.

- Иными словами вектор — это множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление.

Определение

Направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется *изображением вектора*.

Все изображения данного вектора имеют одну и ту же длину. Это делает корректным следующее

Определение

Длиной (или *модулем*) *вектора* называется длина любого его изображения.

Определение

Два вектора *равны*, если они равны как множества, т.е. состоят из одних и тех же направленных отрезков.

Допуская вольность речи, говорят, что

- *два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.*

Очевидно, что для любого вектора $\vec{a}$ и для любой точки A пространства существует единственный направленный отрезок, принадлежащий вектору $\vec{a}$ и имеющий начало в точке A. Построение такого направленного отрезка будем называть *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки A*.

Определение

Два вектора называются *коллинеарными* [*сонаправленными*, *противонаправленными*], если их изображения коллинеарны [сонаправленны, противонаправленны].

Для обозначения этих понятий применяются те же символы, что и в случае направленных отрезков: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Вектор, противоположный данному. Нулевой вектор

Определения

Если отрезок $\overrightarrow{AB}$ является изображением вектора $\vec{a}$, то вектор, изображением которого является отрезок $\overrightarrow{BA}$, называется *противоположным* вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.
Вектор, изображением которого является нулевой направленный отрезок, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Из данных выше определений вытекает, что

- нулевой вектор коллинеарен, сонаправлен и противонаправлен с любым вектором.

Определение

Пусть даны вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Зафиксируем точку O, отложим от нее вектор $\vec{a}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через A. От точки A отложим вектор $\vec{b}$, обозначим конец полученного направленного отрезка через B. Тогда отрезок $\overrightarrow{OB}$ изображает вектор, который называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}+\vec{b}$.

Замечание об определении суммы векторов

Определение суммы векторов корректно, т. е. не зависит от выбора начальной точки O.

Более точно, если мы в качестве O возьмем другую точку P и проделаем то, что записано в определении суммы, то получим направленный отрезок $\overrightarrow{PR}$, который сонаправлен отрезку $\overrightarrow{OB}$ и имеет с ним одинаковую длину (см. рисунок на следующем слайде). Следовательно, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{PR}$ — изображения одного и того же вектора.

Корректность определения суммы векторов

Сумму векторов можно определить и по-другому. Отложим вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной и той же точки O. Концы полученных направленных отрезков обозначим через A и B соответственно, а четвертую вершину параллелограмма со сторонами OA и OB – через M. Тогда вектор, соответствующий направленному отрезку $\overrightarrow{OM}$, будет равен $\vec{a}+\vec{b}$.
См. рисунок ниже, на котором слева вектор $\vec{a}+\vec{b}$ построен по определению (по «правилу треугольника»), а справа – описанным только что способом (по «правилу параллелограмма»). Однако этот способ построения суммы векторов применим только к неколлинеарным векторам.

Два способа определения суммы векторов

Следующие свойства суммы векторов известны из школьного курса. Они легко проверяются, исходя из определения операции сложения.

Свойства суммы векторов

Если $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *— произвольные вектора, то:*

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*коммутативность*);
2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*ассоциативность*);
3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Таким образом, множество всех векторов с операцией их сложения является абелевой группой. Нейтральным элементом этой группы является вектор $\vec{0}$, *а вектором, обратным к* $\vec{a}$, *– вектор* $-\vec{a}$.

Как и в любой группе, операция которой называется сложением, в группе векторов можно определить *вычитание*. *Разность* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это вектор $\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Произведение вектора на число

Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ *на число* t называется вектор $t\vec{a}$ такой, что:

1) $|t\vec{a}\,| = |t| \cdot |\,\vec{a}\,|$;
2) если $t \geqslant 0$, то $t\vec{a} \upuparrows \vec{a}$, а если $t < 0$, то $t\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число часто объединяют термином *линейные операции над векторами*.

Свойства произведения вектора на число

Следующие свойства произведения вектора на число известны из школьного курса. Они легко (хотя и несколько нудно) проверяются, исходя из определений.

Свойства произведения вектора на число

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные вектора, а t и s — произвольные числа, то:

1) $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a}+t\vec{b}$ (*дистрибутивность относительно сложения векторов*);
2) $(t+s)\vec{a} = t\vec{a}+s\vec{a}$ (*дистрибутивность относительно сложения чисел*);
3) $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a}$;
4) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$;
5) $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$.

Орт вектора

Определение

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор. *Ортом* вектора $\vec{a}$ называется вектор длины 1, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

Вот как можно найти орт данного вектора.

Замечание об орте вектора

Если $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}$ является ортом вектора $\vec{a}$.

Доказательство. Поскольку $\frac{1}{|\,\vec{a}\,|} > 0$, из определения произведения вектора на число вытекает, что вектора $\vec{a}$ и $\frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}$ сонаправлены. Далее, имеем

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}\right| = \left|\frac{1}{|\,\vec{a}\,|}\right| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\,\vec{a}\,|} \cdot |\,\vec{a}\,| = 1.$$

Следовательно, вектор $\frac{\vec{a}}{|\,\vec{a}\,|}$ действительно является ортом вектора $\vec{a}$. □

Определение

Переход от ненулевого вектора к его орту называется *нормированием*.

Критерий коллинеарности векторов

Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого числа t.

Доказательство. Достаточность ясна из определения произведения вектора на число.
Необходимость. Поскольку $\vec{a} \parallel \vec{b}$, либо $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, либо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Используя то, что $|\,\vec{b}\,| \neq 0$, положим

$$t := \begin{cases} \frac{|\,\vec{a}\,|}{|\,\vec{b}\,|}, & \text{если } \vec{a} \upuparrows \vec{b}, \\ -\frac{|\,\vec{a}\,|}{|\,\vec{b}\,|}, & \text{если } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}. \end{cases}$$

Если $\vec{a} \upuparrows \vec{b}$, то $t \geqslant 0$, и потому $t\vec{b} \upuparrows \vec{b}$, откуда $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $t < 0$, и потому $t\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{b}$, откуда вновь $t\vec{b} \upuparrows \vec{a}$. Таким образом, в любом случае вектора $\vec{a}$ и $t\vec{b}$ сонаправлены. Кроме того,

$$|t\vec{b}\,| = |t| \cdot |\,\vec{b}\,| = \frac{|\,\vec{a}\,|}{|\,\vec{b}\,|} \cdot |\,\vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,|.$$

Следовательно, $\vec{a} = t\vec{b}$. □

Определение

Базисом плоскости называется произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будем обозначать через $(\vec{a}, \vec{b})$.

Поскольку нулевой вектор по определению коллинеарен любому другому, нулевой вектор не может входить в базис плоскости.

Теорема о разложении вектора по базису на плоскости

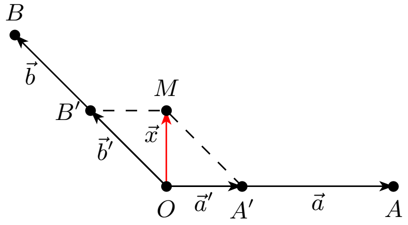
Пусть $(\vec{a}, \vec{b})$ *– базис некоторой плоскости, а* $\vec{x}$ *– вектор, лежащий в этой плоскости. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1 *и* t_2 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}. \tag{1}$$

Определение

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b})$. Коэффициенты t_1, t_2 разложения (1) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ координаты t_1, t_2, записывается так: $\vec{x} = (t_1, t_2)$.

Доказательство. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O нашей плоскости и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B и M соответственно (см. рисунок).



Спроектируем точку M на прямую OA параллельно прямой OB и на прямую OB параллельно прямой OA. Обозначим полученные точки через A' и B' соответственно и положим $\vec{a}' := \overrightarrow{OA'}$ и $\vec{b}' := \overrightarrow{OB'}$. Ясно, что $\vec{a}' \parallel \vec{a}$ и $\vec{b}' \parallel \vec{b}$. Поскольку $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, по критерию коллинеарности векторов $\vec{a}' = t_1\vec{a}$ и $\vec{b}' = t_2\vec{b}$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Тогда $\vec{x} = \vec{a}' + \vec{b}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$.

Осталось доказать единственность. Пусть $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b}$ для некоторых чисел s_1 и s_2. Вычитая это равенство из равенства $\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$, имеем $(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} = \vec{0}$. Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} \parallel \vec{b}$, противоречие. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т. е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$. $\square$

Базис пространства

Определение

Вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются *компланарными*, если существуют изображения этих векторов, лежащие в одной плоскости.

- Термин «компланарность» происходит от латинских корней «com» (придает значение совместности) и «planus» (плоский, ровный).

Замечание о коллинеарности и компланарности

Тройка векторов, содержащая пару коллинеарных векторов, компланарна.

Определение

Базисом пространства называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Базис, состоящий из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначим через $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Из замечания о коллинеарности и компланарности следует, что в любом базисе пространства все вектора попарно неколлинеарны, и в частности, ненулевые.

Теорема о разложении вектора по базису в пространстве

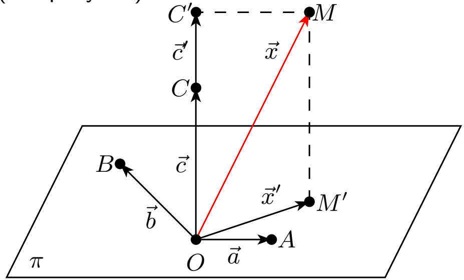
Пусть $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *– базис пространства, а* $\vec{x}$ *– произвольный вектор. Тогда существуют, и притом единственные, числа* t_1*,* t_2 *и* t_3 *такие, что*

$$\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}. \tag{2}$$

Определение

Равенство (2) называется *разложением вектора* $\vec{x}$ *по базису* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Коэффициенты t_1, t_2, t_3 разложения (2) называются *координатами* вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Тот факт, что вектор $\vec{x}$ имеет в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ координаты t_1, t_2, t_3, записывается так: $\vec{x} = (t_1, t_2, t_3)$.

Доказательство. Отложим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{x}$ от некоторой точки O и обозначим концы полученных направленных отрезков через A, B, C и M соответственно (см. рисунок).



Поскольку $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, существует единственная плоскость π, проходящая через точки O, A и B. Спроектируем точку M на плоскость π параллельно прямой OC и на прямую OC параллельно плоскости π. Обозначим полученные точки через M' и C' и положим $\vec{x}' := \overrightarrow{OM'}$ и $\vec{c}' := \overrightarrow{OC'}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{x}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b}$ для некоторых t_1 и t_2. Далее, $\vec{c}' \parallel \vec{c} \neq \vec{0}$, откуда $\vec{c}' = t_3\vec{c}$ для некоторого t_3. Тогда $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{c}' = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$.

Доказательство теоремы о разложении вектора по базису (2)

Существование чисел t_1, t_2 и t_3 с требуемыми свойствами доказано. Осталось доказать их единственность.

Пусть $\vec{x} = s_1\vec{a} + s_2\vec{b} + s_3\vec{c}$ для некоторых s_1, s_2 и s_3. Вычитая это равенство из равенства $\vec{x} = t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c}$, получим

$$(t_1 - s_1)\vec{a} + (t_2 - s_2)\vec{b} + (t_3 - s_3)\vec{c} = \vec{0}.$$

Если $t_1 - s_1 \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{t_2 - s_2}{t_1 - s_1} \cdot \vec{b} - \frac{t_3 - s_3}{t_1 - s_1} \cdot \vec{c}$. Но тогда вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, что противоречит условию. Следовательно, $t_1 - s_1 = 0$, т.е. $t_1 = s_1$. Аналогично проверяется, что $t_2 = s_2$ и $t_3 = s_3$. $\square$

Замечание о координатах векторов $\vec{x}+\vec{y}$ и $t\vec{x}$

Если вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имеют в одном и том же базисе $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ координаты (x_1,x_2,x_3) и (y_1,y_3,y_3) соответственно, а t — произвольное число, то вектор $\vec{x}+\vec{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$, а вектор $t\vec{x}$ — координаты (tx_1,tx_2,tx_3). Аналогичный факт справедлив для векторов на плоскости.

Доказательство. По определению координат вектора в пространстве имеют место равенства $\vec{x}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$ и $\vec{y}=y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c}$. Следовательно,

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c})+(y_1\vec{a}+y_2\vec{b}+y_3\vec{c})=$$

$$=(x_1+y_1)\vec{a}+(x_2+y_2)\vec{b}+(x_3+y_3)\vec{c},$$

$$t\vec{x}=t(x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c})=(tx_1)\vec{a}+(tx_2)\vec{b}+(tx_3)\vec{c}.$$

Остается сослаться на определение координат вектора в пространстве.
В случае плоскости доказательство абсолютно аналогично. □

Итак, с помощью координат линейные операции над векторами плоскости (пространства) сводятся к обычным арифметическим операциям над парами (соответственно тройками) чисел.
Эта простая, но исключительно продуктивная идея принадлежит французскому ученому Рене Декарту (1596–1650).

По выражению другого французского математика, Гюстава Шоке (1915–2006), именно эта идея открыла тот «царский путь» в геометрию, которого не знал Евклид.