

# Тема 2-9: Действия над линейными отображениями

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Алгебра и геометрия для направлений  
Механика и математическое моделирование и  
Прикладная математика  
(2 семестр)

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ . Обозначим через  $H(U, V)$  множество всех линейных отображений из  $U$  в  $V$ .

### Определение суммы линейных отображений

*Суммой* линейных отображений  $A, B \in H(U, V)$  называется отображение  $C : U \rightarrow V$ , определенное так:  $Cx = Ax + Bx$  для любого  $x \in U$ .  
Обозначение:  $C = A + B$ .

### Предложение

Сумма двух линейных отображений является линейным отображением. Множество  $H(U, V)$  является абелевой группой относительно операции сложения.

↓ Пусть  $C = A + B$ , где  $A, B \in H(U, V)$ . Для любых  $x, y \in U$ ,  $\alpha \in F$  имеем  $C(x + y) = A(x + y) + B(x + y) = Ax + Ay + Bx + By = Ax + Bx + Ay + By = Cx + Cy$  и  $C(\alpha x) = A(\alpha x) + B(\alpha x) = \alpha Ax + \alpha Bx = \alpha(Ax + Bx) = \alpha Cx$ . Таким образом,  $C$  – линейное отображение, и сложение – алгебраическая операция на множестве  $H(U, V)$ .

Докажем, что операция сложения на множестве  $H(U, V)$  коммутативна.

Для  $A, B \in H(U, V)$  и любого  $x \in U$  имеем

$$(A + B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B + A)x, \text{ откуда } A + B = B + A.$$

Ассоциативность сложения проверяется аналогично.

Нейтральным элементом относительно сложения в  $H(U, V)$  является нулевое отображение  $\mathcal{O}$ , определенное так:  $\mathcal{O}x = 0_V$  для любого  $x \in U$ .

Очевидно, что  $\mathcal{O} \in H(U, V)$ .

Противоположным элементом к отображению  $A \in H(U, V)$  является отображение  $B$ , определенное так:  $Bx = -(Ax)$  для любого  $x \in U$ .

Проверьте, что  $B \in H(U, V)$  и  $A + B = \mathcal{O}$ . ↑

## Определение

**Произведением** линейного отображения  $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$  на скаляр  $\lambda \in F$  называется отображение  $\mathcal{D} : U \rightarrow V$ , определенное так:  $\mathcal{D}x = \lambda(\mathcal{A}x)$  для любого  $x \in U$ . Обозначение:  $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$ .

## Предложение

Произведение линейного отображения на скаляр является линейным отображением. Множество  $\mathcal{H}(U, V)$  является линейным пространством над полем  $F$ .

↓ Пусть  $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$ , где  $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$ . Для любых  $x, y \in U$ ,  $\alpha \in F$  имеем  $\mathcal{D}(x + y) = \lambda(\mathcal{A}(x + y)) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \lambda\mathcal{A}x + \lambda\mathcal{A}y = \mathcal{D}x + \mathcal{D}y$  и  $\mathcal{D}(\alpha x) = \lambda(\mathcal{A}(\alpha x)) = \lambda(\alpha\mathcal{A}x) = \alpha(\lambda\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{D}x)$ , откуда  $\mathcal{D} \in \mathcal{H}(U, V)$ . Докажем, что  $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$  для любых  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{H}(U, V)$  и  $\lambda \in F$ . Имеем  $(\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}))x = \lambda((\mathcal{A} + \mathcal{B})x) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \lambda\mathcal{A}x + \lambda\mathcal{B}x = (\lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})x$  для любого  $x \in U$ , что и требуется.

Аналогично проверяются остальные аксиомы линейного пространства (см. сл.2 т.2-1):  $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}$ ,  $\lambda(\mu)\mathcal{A} = (\lambda\mu)\mathcal{A}$ ,  $1\mathcal{A} = \mathcal{A}$  для любых  $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$  и  $\lambda, \mu \in F$ . ↑

## Теорема

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $\dim U = n$ ,  $\dim V = k$ . Тогда линейные пространства  $\mathcal{H}(U, V)$  и  $F^{k \times n}$  изоморфны.

↓ Выберем базисы  $B = (b_1, \dots, b_n)$  в пространстве  $U$  и  $C = (c_1, \dots, c_k)$  в пространстве  $V$ . Определим отображение  $\Phi : \mathcal{H}(U, V) \rightarrow F^{k \times n}$ , полагая  $\Phi(\mathcal{A}) = A_{B,C}$ , где  $A_{B,C}$  – матрица линейного отображения  $\mathcal{A}$  в базисах  $B, C$ . В силу матричного определения матрицы линейного отображения (см. равенство (3) на сл.8 т.2-7) имеем

$$AB = C \cdot \Phi(\mathcal{A}). \quad (1)$$

Покажем, что  $\Phi$  – изоморфизм. Пусть  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{H}(U, V)$  и  $\Phi(\mathcal{A}_1) = \Phi(\mathcal{A}_2)$ . В силу (1) имеем  $\mathcal{A}_1 B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1) = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_2 B$ , откуда  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ , поскольку  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$  одинаково действуют на базис  $B$ . Таким образом,  $\Phi$  инъективно. Для доказательства сюръективности возьмем любую матрицу  $M \in F^{k \times n}$ . По теореме сл.7 т.2-7 существует  $\mathcal{M} \in \mathcal{H}(U, V)$  такое что  $M B = C \cdot \mathcal{M}$ , т.е.  $\Phi(\mathcal{M}) = M$ . Мы доказали, что  $\Phi$  – биекция.

Для строк из  $k$  векторов линейного пространства  $V$  сложение и умножение на скаляр определяются поэлементно.

Покажем, что  $\Phi$  – линейное отображение. Пусть  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in H(U, V)$ . Имеем  $C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)B = \mathcal{A}_1B + \mathcal{A}_2B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1) + C \cdot \Phi(\mathcal{A}_2) = C \cdot (\Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2))$ , откуда следует  $\Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2)$ .

Пусть  $\mathcal{A} \in H(U, V)$ ,  $\lambda \in F$ . Тогда  $C \cdot \Phi(\lambda\mathcal{A}) = (\lambda\mathcal{A})B = \lambda(\mathcal{A}B) = \lambda(C \cdot \Phi(\mathcal{A})) = C \cdot (\lambda\Phi(\mathcal{A}))$ , откуда  $\Phi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\Phi(\mathcal{A})$ .

Теорема полностью доказана.  $\uparrow$

## Следствие

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $\dim U = n$ ,  $\dim V = k$ . Тогда  $\dim_F H(U, V) = kn$ .

Пусть  $U, V, W$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $A \in H(U, V)$ ,  $B \in H(V, W)$ .

### Определение

**Произведением** линейных отображений  $B$  и  $A$  называется отображение  $C : U \rightarrow W$ , определенное так:  $Cx = B(Ax)$  для любого  $x \in U$ .  
Обозначение:  $C = BA$ .

### Предложение

Произведение линейных отображений является линейным отображением. Если  $N, K, L$  – базисы пространств  $U, V, W$  соответственно,  $A \leftrightarrow_{N,K} A$ ,  $B \leftrightarrow_{K,L} B$ ,  $C \leftrightarrow_{N,L} C$ , то  $C = B \cdot A$ .

↓ Для любых  $x, y \in U$  имеем  $C(x + y) = B(A(x + y)) = B(Ax + Ay) = B(Ax) + B(Ay) = Cx + Cy$ , откуда  $C(x + y) = Cx + Cy$ . Для любых  $x \in U$ ,  $\lambda \in F$  имеем  $C(\lambda x) = B(A(\lambda x)) = B(\lambda Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda Cx$ , т.е.  $C(\lambda x) = \lambda Cx$ . Таким образом,  $C$  – линейное отображение. По матричному определению матрицы линейного отображения имеем  $AN = K \cdot A$ ,  $BK = L \cdot B$ ,  $CN = L \cdot C$ . С другой стороны,  $CN = B(AN) = B(K \cdot A) = (BK) \cdot A = (L \cdot B) \cdot A = L \cdot (B \cdot A)$ . Следовательно,  $C = B \cdot A$ . ↑

Используя формулу для матрицы произведения линейных отображений и ассоциативность умножения отображений, можно получить еще одно доказательство ассоциативности умножения матриц. Пусть  $A \in F^{n \times k}$ ,  $B \in F^{p \times n}$ ,  $C \in F^{m \times p}$ . Возьмем пространства  $F_k$ ,  $F_n$ ,  $F_p$ ,  $F_m$  и с помощью матрицы  $A$  построим линейное отображение  $\mathcal{A} : F_k \rightarrow F_n$  по правилу  $\mathcal{A}x = A \cdot x$  и аналогично с помощью матриц  $B$ ,  $C$  построим линейные отображения  $\mathcal{B} : F_n \rightarrow F_p$  и  $\mathcal{C} : F_p \rightarrow F_m$ . Так как  $\mathcal{C}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = (\mathcal{C}\mathcal{B})\mathcal{A}$ , заключаем, что  $C \cdot (B \cdot A) = (C \cdot B) \cdot A$ .

## Предложение

Пусть  $U, V, W$  – конечномерные линейные пространства над полем  $F$ ,  $A \in H(U, V)$ ,  $B \in H(V, W)$ . Тогда  $r(A) + r(B) - \dim V \leq r(\mathcal{B}\mathcal{A}) \leq r(\mathcal{A}), r(\mathcal{B})$ .

↓ Так как  $\text{Im } \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{B}(\text{Im } \mathcal{A})$ , заключаем, что  $\text{Im } \mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \text{Im } \mathcal{B}$  и  $\dim(\text{Im } \mathcal{B}\mathcal{A}) \leq \dim(\text{Im } \mathcal{A})$ , поэтому  $r(\mathcal{B}\mathcal{A}) \leq r(\mathcal{B})$  и  $r(\mathcal{B}\mathcal{A}) \leq r(\mathcal{A})$ . Так как  $\text{Im } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}^{-1}(\text{Im } \mathcal{B}\mathcal{A})$ , согласно предложению сл.16 т.2-8 заключаем, что  $r(\mathcal{A}) \leq r(\mathcal{B}\mathcal{A}) + d(\mathcal{B})$ . Из теоремы сл.6 т.2-8 следует, что  $d(\mathcal{B}) = \dim V - r(\mathcal{B})$ . Подставив в последнее неравенство, получим  $r(\mathcal{A}) \leq r(\mathcal{B}\mathcal{A}) + \dim V - r(\mathcal{B})$ , откуда следует требуемое неравенство  $r(\mathcal{A}) + r(\mathcal{B}) - \dim V \leq r(\mathcal{B}\mathcal{A})$ . ↑



Предложение сл.8 дает другое доказательство свойства 4 ранга матрицы (сл.13 т.2-5) и позволяет указать еще одно свойство ранга, связанное с умножением матриц.

### Следствие

Пусть  $F$  – поле. Для любых матриц  $A \in F^{k \times n}$ ,  $B \in F^{n \times p}$  имеет место неравенство  $r(A) + r(B) - n \leq r(A \cdot B)$ .

Пусть  $V$  – линейное пространство над полем  $F$ . Напомним, что через  $H(V)$  обозначается множество всех линейных операторов на  $V$ . Тогда на  $H(V)$  определены операции сложения, умножения на скаляр и умножения. В частности, для любого линейного оператора определены степени с натуральным показателем. Обозначим через  $\mathcal{E}$  **единичный** оператор, определяемый так:  $\mathcal{E}v = v$  для любого  $v \in V$ . Для любого многочлена  $f = \lambda_0 + \lambda_1x + \dots + \lambda_mx^m$  из кольца многочленов  $F[x]$  над полем  $F$  определим

## Значение многочлена от линейного оператора

Пусть  $\mathcal{A} \in H(V)$ . Положим  $f(\mathcal{A}) = \lambda_0\mathcal{E} + \lambda_1\mathcal{A} + \dots + \lambda_m\mathcal{A}^m$ .

Ясно, что  $f(\mathcal{A}) \in H(V)$  для любых  $\mathcal{A} \in H(V)$ ,  $f \in F[x]$ . Из утверждения сл.7 следует, что если  $N$  – базис  $V$  и  $\mathcal{A} \leftrightarrow_N A$  для некоторой матрицы  $A \in F^{n \times n}$ , то для любого натурального числа  $m$  имеет место  $\mathcal{A}^m \leftrightarrow_N A^m$ . Мы получаем следующее

## Предложение

Если  $N$  – базис  $V$  и  $\mathcal{A} \leftrightarrow_N A$ , то для любого многочлена  $f \in F[x]$  справедливо  $f(\mathcal{A}) \leftrightarrow_N f(A)$ .

## Определение

Говорят, что многочлен  $f(x)$  *аннулирует* линейный оператор  $\mathcal{A}$ , если  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$ .

Из предложения сл. 10 получаем

## Предложение

Следующие условия эквивалентны для многочлена  $f(x)$ :

- (1)  $f(x)$  аннулирует линейный оператор  $\mathcal{A}$ ;
- (2)  $f(x)$  аннулирует матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе;
- (3)  $f(x)$  аннулирует матрицу оператора  $\mathcal{A}$  в любом базисе.

Таким образом, можно определить *минимальный многочлен*  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  аналогично тому, как это было сделано для квадратных матриц на сл.6-7 т.1-11. Старший коэффициент многочлена  $\mu_{\mathcal{A}}(x)$  равен 1. Из предложения сл.7 т.1-11 и предложения этого слайда вытекает

## Следствие

Минимальный многочлен линейного оператора  $\mathcal{A}$  совпадает с минимальным многочленом любой матрицы оператора  $\mathcal{A}$  и делит любой многочлен, аннулирующий  $\mathcal{A}$ .

## Определение

Линейные операторы  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{H}(V)$  называются *перестановочными*, если  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ .

Очевидно следующее

## Наблюдение

Для любых  $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(V)$ ,  $f \in F[x]$  линейные операторы  $\mathcal{A}$  и  $f(\mathcal{A})$  перестановочны.

## Определение

Линейный оператор  $\mathcal{A}$  линейного пространства  $V$  называется **обратимым**, если существует обратное отображение  $\mathcal{A}^{-1}$  (т.е. если  $\mathcal{A}$  является изоморфизмом  $V$  на себя).

Из наблюдения сл.18 т.2-8 немедленно получаем

## Наблюдение

Обратное отображение  $\mathcal{A}^{-1}$  к линейному оператору  $\mathcal{A}$  само является линейным оператором.

Из предложения сл.18 т.2-8 немедленно следует

## Предложение

Следующие условия для линейного оператора  $\mathcal{A}$  линейного пространства  $V$  размерности  $n$  эквивалентны:

- (1) оператор  $\mathcal{A}$  обратим;
- (2) матрица оператора  $\mathcal{A}$  в некотором базисе невырожденная;
- (3) матрица оператора  $\mathcal{A}$  в любом базисе невырожденная.