Тема 2-7: Линейные отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть U, V – линейные пространства над полем F.

Определение линейного отображения

Отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ называется *линейным*, если выполняются следующие условия:

1. $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ для любых $x, y \in U$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}(x))$ для любых $x \in U$, $\lambda \in F$.

Условие 1 называется *аддитивностью*, условие 2 – *однородностью* отображения $\mathcal{A}$.

Определение линейного оператора

Линейное отображение $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ линейного пространства V в само себя называется *линейным оператором* на пространстве V.

Для простоты будем писать $\mathcal{A}x$ вместо $\mathcal{A}(x)$, если это не вызовет двусмысленности.

Примеры

Оператор поворота на плоскости

Пусть π – плоскость, φ – угол. Положим $\mathcal{R}_\varphi \vec{x} = \vec{y}$, где вектор $\vec{y}$ получается из вектора $\vec{x} \in V_\pi$ поворотом на угол φ против часовой стрелки, если $\vec{x} \neq \vec{0}$, и $\vec{y} = \vec{0}$ при $\vec{x} = \vec{0}$. Тогда $\mathcal{R}_\varphi : V_\pi \longrightarrow V_\pi$ – линейный оператор.

Отображение проектирования на плоскость параллельно вектору

Пусть π – плоскость, $\vec{b} \in V_g$ – вектор и $\vec{b} \not\parallel \pi$. Положим $\mathcal{P}_{\pi \| \vec{b}} \vec{x} = \vec{y}$, где вектор $\vec{y}$ – компонента вектора $\vec{x}$ на плоскость π параллельно вектору $\vec{b}$. Тогда $\mathcal{P}_{\pi \| \vec{b}} : V_g \to V_\pi$ – линейное отображение.

Вектор $\vec{y}$ можно определить как вектор $\vec{x} - \tau \vec{b}$ $(\tau \in \mathbb{R})$, компланарный плоскости π.

Оператор симметрии относительно плоскости

Пусть π – плоскость. $\mathcal{S}_\pi \vec{x} = \vec{y}$, где вектор $\vec{y}$ – симметричный к $\vec{x}$ относительно плоскости π. Тогда $\mathcal{S}_\pi : V_g \longrightarrow V_g$ – линейный оператор.

Проверка линейности указанных отображений производится с использованием элементарных геометрических утверждений.

Основной пример

Пусть F – поле, $k,n\in\mathbb{N}$, $U=F_n$, $V=F_k$, $A\in F^{k\times n}$. Положим $\mathcal{A}x=A\cdot x$ для любого столбца $x\in U$. Тогда $\mathcal{A}:U\longrightarrow V$ – линейное отображение.

Умножение на матрицы

Пусть F – поле, $k,n,\ell,p\in\mathbb{N}$, $U=F^{k\times n}$, $V=F^{\ell\times p}$, $A\in F^{\ell\times k}, B\in F^{n\times p}$. Положим $\mathcal{M}_{A,B}X=A\cdot X\cdot B$ для любой матрицы $X\in U$. Тогда $\mathcal{M}_{A,B}:U\longrightarrow V$ – линейное отображение.

Линейность этих отображений следует из свойств операций над матрицами (сл.15 темы 1-6).
Первый из примеров этого слайда описывает в некотором смысле любое линейное отображение конечномерных линейных пространств (см. сл.14 ниже).

Изоморфизм

Любой изоморфизм одного линейного пространства на другое (определение см. на сл.11 т.2-3) является линейным отображением.

Оператор дифферецирования

Пусть F – поле. Положим $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$. Получаем линейные операторы $\mathcal{D} : F[x] \longrightarrow F[x]$ и $\mathcal{D} : VP_n(F) \longrightarrow VP_n(F)$ для любого натурального числа n (определение линейного пространства $VP_n(F)$ см. на сл.5 т.2-1).

Отображение дифферецирования

Полагая $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$, для любого натурального числа n получаем линейное отображение $\mathcal{D} : VP_n(F) \longrightarrow VP_{n-1}(F)$.

Линейность дифференцирования следует из свойств производной многочлена (см. сл.23 темы 1-9).

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение.

Предложение

1. $\mathcal{A}0_U = 0_V$;
2. $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m) = \lambda_1 \mathcal{A} u_1 + \ldots + \lambda_m \mathcal{A} u_m$ для любых векторов $u_1, \ldots, u_m \in U$ и любых скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$.

Имеем $\mathcal{A}0_U = \mathcal{A}(0 \cdot 0_U) = 0\mathcal{A}(0_U) = 0_V$. Второе утверждение следует из определения линейного отображения.

Пусть $C = (c_1, \ldots, c_m)$ – система векторов из U. Обозначим через $\mathcal{A}C$ систему $(\mathcal{A}c_1, \ldots, \mathcal{A}c_m)$ из образов этих векторов при отображении $\mathcal{A}$. Пусть $\Gamma \in F^{m \times p}$ – матрица из скаляров. Тогда из утверждения 2 предложения с учетом матричной записи линейных комбинаций (см. сл.9 т.2-1) получаем

$$\mathcal{A}(C \cdot \Gamma) = (\mathcal{A}C) \cdot \Gamma. \tag{1}$$

Теорема

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U. Тогда для любой системы векторов $(v_1, \ldots, v_n)$ пространства V существует единственное линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ такое что $\mathcal{A}b_j = v_j$ для $j = 1, \ldots, n$.

$\Downarrow$ Возьмем вектор $x \in U$ и разложим его по базису B: $x = \xi_1 b_1 + \ldots + \xi_n b_n$. Положим $\mathcal{A}x = \xi_1 v_1 + \ldots + \xi_n v_n$. В силу единственности разложения вектора по базису получаем отображение линейного пространства U на подпространство $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Имеем $\mathcal{A}x = (v_1, \ldots, v_n)[x]_B = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B$. В силу свойств координат (сл.10 т.2-3) отображение $\mathcal{A}$ является линейным. Очевидно, что $\mathcal{A}b_j = v_j$ для $j = 1, \ldots, n$.
Докажем единственность. Пусть $\mathcal{A}' : U \longrightarrow V$ – произвольное линейное отображение такое что $\mathcal{A}'b_j = v_j$ для $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathcal{A}'B = \mathcal{A}B$. Для любого $x \in U$ в силу равенства (1) сл.5 имеем
$\mathcal{A}'x = \mathcal{A}'(B \cdot [x]_B) = (\mathcal{A}'B) \cdot [x]_B = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B = \mathcal{A}x$ и потому $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. $\Uparrow$

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U, $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базис пространства V. Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V. Разложим вектор $\mathcal{A}b_j$ по базису C:

$$\mathcal{A}b_j = \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \ldots + \alpha_{kj}c_k, \; j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Определение

Матрицей линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C называется матрица $(\alpha_{ij})_{k\times n}$, составленная из столбцов координат векторов $\mathcal{A}b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ в базисе C.

Обозначается матрица линейного отображения в базисах через $A_{B,C}$.
Будем использовать также обозначение $\mathcal{A} \longleftrightarrow_{B,C} A$.
Равенства (2) можно записать в матричном виде:

$$\mathcal{A}B = C \cdot A_{B,C}. \tag{3}$$

Отметим, что матрица линейного отображения в базисах является матрицей размеров $k \times n$, где $n = \dim U$, $k = \dim V$.

Матрица линейного оператора

Пусть V – линейное пространство над полем F, $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис пространства V и пусть $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ – линейный оператор пространства V. В случае линейного оператора матрица определяется с помощью одного базиса:

$$\mathcal{A}b_j = \alpha_{1j}b_1 + \alpha_{2j}b_2 + \ldots + \alpha_{nj}b_n, \; j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

Определение

Матрицей линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе B называется матрица $(\alpha_{ij})_{n\times n}$, составленная из столбцов координат векторов $\mathcal{A}b_j$ $(j = 1, \dots, n)$ в базисе B.

Обозначается матрица линейного оператора в базисе через A_B. Будем использовать также обозначение $\mathcal{A} \longleftrightarrow_B A$.
Равенства (4) можно записать в матричном виде:

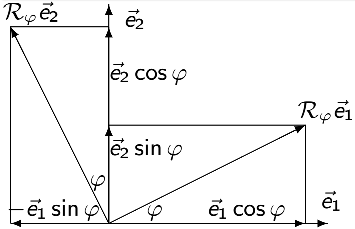
$$\mathcal{A}B = B \cdot A_B. \tag{5}$$

Отметим, что матрица линейного оператора в базисе является квадратной матрицей порядка $n = \dim V$.

Оператор поворота определен на сл.3.

Матрица оператора поворота

Выберем на плоскости ортонормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда матрица оператора поворота $\mathcal{R}_\varphi$ в этом базисе имеет вид $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$



Длина векторов $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_1$ и $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_2$ равна 1. Разлагая их по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, получаем $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi$, $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi$.

Примеры. Матрица отображения проектирования на плоскость параллельно вектору

Определение см. на сл.3. Пусть π – плоскость. Рассматривая отображение проектирования на пространство V_π параллельно вектору $\vec{b}$, выберем в пространстве V_g базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а в пространстве V_π векторов на плоскости π – базис $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. Тогда, очевидно, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$ – базис пространства V_g. Имеем

$$\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{a}_1 + \alpha_{21}\vec{a}_2 + \alpha_{31}\vec{b} \Rightarrow \mathcal{P}_{\pi\|\vec{b}}\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{a}_1 + \alpha_{21}\vec{a}_2,$$

$$\vec{e}_2 = \alpha_{12}\vec{a}_1 + \alpha_{22}\vec{a}_2 + \alpha_{32}\vec{b} \Rightarrow \mathcal{P}_{\pi\|\vec{b}}\vec{e}_2 = \alpha_{12}\vec{a}_1 + \alpha_{22}\vec{a}_2,$$

$$\vec{e}_3 = \alpha_{13}\vec{a}_1 + \alpha_{23}\vec{a}_2 + \alpha_{33}\vec{b} \Rightarrow \mathcal{P}_{\pi\|\vec{b}}\vec{e}_3 = \alpha_{13}\vec{a}_1 + \alpha_{23}\vec{a}_2.$$

Матрица отображения проектирования на плоскость параллельно вектору

$$P_{\pi\|\vec{b}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Определение см. на сл.3. Пусть π – плоскость. Выберем в пространстве V_g базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ так, что $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ компланарны плоскости π (т.е. $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_\pi$) и $\vec{e}_3 \perp \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\pi \vec{e}_1 &= \vec{e}_1, \\ \mathcal{S}_\pi \vec{e}_2 &= \vec{e}_2, \\ \mathcal{S}_\pi \vec{e}_3 &= -\vec{e}_3. \end{aligned}$$

$$S_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Определение см. на сл.4. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$. Выберем в пространствах F_n и F_k стандартные базисы (состоящие из столбцов единичных матриц E_n и E_k соответственно, взятых по порядку). Обозначим столбцы матрицы E_n через $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, а столбцы матрицы E_k – через $(f_1, f_2, \dots, f_k)$. Тогда, так как $Ae_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{kj})^\top$, получаем

$$\mathcal{A}e_j = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \ldots + \alpha_{kj}f_k.$$

Следовательно, матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет вид $(\alpha_{ij})_{k\times n}$, т.е. совпадает с исходной матрицей A. Это обозначение согласуется с нашей договоренностью о соответствии обозначений отображения и его матрицы.

Примеры. Матрица отображения умножения на матрицы

Определение см. на сл.4. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{\ell\times k}$, $B = (\alpha_{ij})_{n\times p}$. Выберем в пространствах $F^{k\times n}$ и $F^{\ell\times p}$ базисы, состоящие из матричных единиц $E_{i,j;k,n}$ и $E_{i,j;\ell,p}$, расположенных в порядке $E_{11;k,n}, E_{12;k,n}, \ldots, E_{1n;k,n}$, $E_{21;k,n}, E_{22;k,n}, \ldots, E_{2n;k,n}, \ldots, E_{k1;k,n}, E_{k2;k,n}, \ldots, E_{kn;k,n}$ и во втором базисе в таком же порядке (по строкам). Так как $\mathcal{M}_{A,B}E_{i,j;k,n} = A \cdot E_{i,j;k,n} \cdot B$, получаем

$$\mathcal{M}_{A,B}E_{i,j;k,n} = \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{p} \alpha_{si}\beta_{jt}E_{s,t;\ell,p}.$$

Следовательно, матрица отображения $\mathcal{M}_{A,B}$ в рассматриваемых базисах имеет вид

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix}
\alpha_{11}\beta_{11} & \ldots & \alpha_{11}\beta_{n1} & \alpha_{12}\beta_{11} & \ldots & \alpha_{12}\beta_{n1} & \ldots & \alpha_{1k}\beta_{11} & \ldots & \alpha_{1k}\beta_{n1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{11}\beta_{1p} & \ldots & \alpha_{11}\beta_{np} & \alpha_{12}\beta_{1p} & \ldots & \alpha_{12}\beta_{np} & \ldots & \alpha_{1k}\beta_{1p} & \ldots & \alpha_{1k}\beta_{np} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{\ell 1}\beta_{11} & \ldots & \alpha_{\ell 1}\beta_{n1} & \alpha_{\ell 2}\beta_{11} & \ldots & \alpha_{\ell 2}\beta_{n1} & \ldots & \alpha_{\ell k}\beta_{11} & \ldots & \alpha_{\ell k}\beta_{n1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{\ell 1}\beta_{1p} & \ldots & \alpha_{\ell 1}\beta_{np} & \alpha_{\ell 2}\beta_{1p} & \ldots & \alpha_{\ell 2}\beta_{np} & \ldots & \alpha_{\ell k}\beta_{1p} & \ldots & \alpha_{\ell k}\beta_{np}
\end{pmatrix}.$$

Возьмем в пространстве $VP_n(F)$ базис $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Так как $(x^k)' = kx^{k-1}$, получаем равенство

Матрица оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ на пространстве $VP_n(F)$

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как линейное пространство $F[x]$ не является конечномерным, для оператора дифференцирования на этом пространстве матрица не определена.

Возьмем в пространстве $VP_n(F)$ базис $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$, а в пространстве $VP_{n-1}(F)$ – базис $C = (1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$

Матрица отображения дифференцирования $\mathcal{D}_1 : VP_n(F) \longrightarrow VP_{n-1}(F)$

$$D_{1BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U, $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базис пространства V. Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V и $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A_{B,C}$, т.е. $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C. Найдем координаты образа вектора $\mathcal{A}x$ в базисе C, считая известными координаты вектора x в базисе B. Так как $x = B[x]_B$ (см. формулу (2) сл.9 т.2-3), в силу формулы (1) сл.5 имеем $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(B \cdot [x]_B) = (\mathcal{A}B) \cdot [x]_B = (C \cdot A_{B,C}) \cdot [x]_B = C \cdot (A_{B,C} \cdot [x]_B)$, поэтому $\mathcal{A}x = C \cdot (A_{B,C} \cdot [x]_B)$. В силу единственности координат имеем

Формула для координат образа вектора

$$[\mathcal{A}x]_C = A_{B,C} \cdot [x]_B.$$

Полученная формула совпадает с формулой из определения отображения в основном примере на сл.4. Это объясняет название "основной пример".

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V. Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис пространства U, $C = (c_1, \ldots, c_k)$ – базис пространства V и $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C. Предположим, что в пространствах U и V заданы другие базисы $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ и $C' = (c'_1, \ldots, c'_k)$. Как связаны между собой матрицы $A_{B,C}$ и $A_{B',C'}$? Будем считать известными матрицы перехода T от базиса B к базису B' и S от базиса C к базису C'. Таким образом, $B' = B \cdot T$ и $C' = C \cdot S$. Из равенства $\mathcal{A}B' = C' \cdot A_{B',C'}$ получаем $\mathcal{A}B' = \mathcal{A}(B \cdot T) = (\mathcal{A}B) \cdot T = (C \cdot A_{B,C}) \cdot T = C \cdot (A_{B,C} \cdot T)$. С другой стороны, $\mathcal{A}B' = C' \cdot A_{B',C'} = (C \cdot S) \cdot A_{B',C'} = C \cdot (S \cdot A_{B',C'})$. Таким образом, $C \cdot (A_{B,C} \cdot T) = C \cdot (S \cdot A_{B',C'})$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем $A_{B,C} \cdot T = S \cdot A_{B',C'}$. Так как матрица перехода S является обратимой, из последнего равенства получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы линейного отображения при изменении базисов

$$A_{B',C'} = S^{-1} \cdot A_{B,C} \cdot T.$$

Применяя формулу сл.18 к случаю линейного оператора $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ линейного V пространства над полем F, получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса

$$A_{B'} = T^{-1} \cdot A_B \cdot T.$$

В этой формуле B и B' – базисы пространства V, T – матрица перехода T от базиса B к базису B'.

Определение

Пусть F – поле и A, A' – матрицы из $F^{n\times n}$. Говорят, что матрица A' *подобна* матрице A, если существует обратимая матрица $T \in F^{n\times n}$ такая что $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$. Обозначение: $A' \propto A$.

Предложение

Отношение подобия является отношением эквивалентности на множестве квадратных матриц порядка n над полем F.

$\Downarrow$ Рефлексивность указанного отношения очевидна: нужно взять $T = E_n$, получим $A \propto A$ для любой $A \in F^{n\times n}$. Симметричность этого отношения также очевидна: если $A' \propto A$, т.е. $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, то $A = T \cdot A' \cdot T^{-1}$, и, взяв $T_1 = T^{-1}$, получим $A = T_1^{-1} \cdot A' \cdot T_1$, т.е. $A \propto A'$. Докажем транзитивность. Пусть $B \propto A$ и $C \propto B$, т.е. $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ и $C = S^{-1} \cdot B \cdot S$ для некоторых обратимых матриц $T, S \in F^{n\times n}$. Так как матрица $T \cdot S$ обратима в силу свойства 2 сл.29 т.1-6 и $(T \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot T^{-1}$, имеем $C = S^{-1} \cdot B \cdot S = S^{-1} \cdot (T^{-1} \cdot A \cdot T) \cdot S =$
$= (S^{-1} \cdot T^{-1}) \cdot A \cdot (T \cdot S) = (T \cdot S)^{-1} \cdot A \cdot (T \cdot S)$, т.е.
$C = (T \cdot S)^{-1} \cdot A \cdot (T \cdot S)$, откуда следует $C \propto A$. $\Uparrow$

Будучи отношением эквивалентности, отношение подобия, как отмечалось на сл.10 т.1-3 определяет разбиение множества $F^{n\times n}$ на классы подобных между собой матриц. Рассмотрим линейное пространство V над полем F размерности n и выберем в нем некоторый базис B. Будем обозначать множество всех линейных операторов из V в себя через $\mathrm{H}(V)$. Сопоставим каждому линейному оператору $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ его матрицу A_B в базисе B.

Предложение

Класс подобных матриц $A_B^{\propto}$ состоит из всех матриц линейного оператора $\mathcal{A}$ во всевозможных базисах пространства V.

$\Downarrow$ Пусть C – произвольный базис линейного пространства V. Тогда $\mathcal{A} \leftrightarrow_C A_C$ и согласно формуле предыдущего слайда $A_C \propto A_B$, т.е. $A_C \in A_B^{\propto}$. Обратно, пусть $A_1 \in A_B^{\propto}$. Тогда $A_1 = T^{-1} \cdot A_B \cdot T$. Рассмотрим систему векторов $B \cdot T$. Так как матрица T невырожденная, эта система в силу второго утверждения сл.16 т.2-3 является базисом пространства V. Оператор $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет матрицу A_1. $\Uparrow$

Пусть n-мерное линейное пространство V над полем F разлагается в прямую сумму подпространств $V = U \oplus W$.

Определения

Оператором проектирования пространства V на подпространство U параллельно W называется отображение V на U, сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ его компоненту y на подпространство U параллельно W (см. сл.21 т.2-4). Обозначение: $\mathcal{P}_{U\|V}$.
Оператором отражения пространства V относительно подпространства U параллельно W называется отображение V на V, сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ вектор $y - z$, где y – его компонента на подпространство U параллельно W (см. сл.21 т.2-4), а $z = x - y$. Обозначение: $\mathcal{R}_{U\|V}$.

Легко проверить, что операторы проектирования и отражения являются линейными. Их матрицы имеют наиболее простой вид в базисе пространства V, полученном объединением базиса $(u_1, \dots, u_k)$ подпространства U и базиса $(w_1, \dots, w_m)$ подпространства W. А именно, $\mathcal{P}_{U\|V} u_j = u_j$, $\mathcal{P}_{U\|V} w_s = 0_V$, $\mathcal{R}_{U\|V} u_j = u_j$, $\mathcal{R}_{U\|V} w_s = -w_s$ при $j = 1, \dots, k$ и $s = \dots, m$. Таким образом, матрицы этих операторов – блочные и первым блоком является матрицей E_k; второй блок у матрицы оператора проектирования – нулевой, а у матрицы оператора отражения это матрица $-E_m$.