

Тема 2-6: Общая теория систем линейных уравнений

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть F – поле, $A \in F^{k \times n}$, $b \in F_k$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ – столбец из n неизвестных. Рассмотрим систему линейных уравнений над полем F в матричной записи

$$Ax = b.$$

Определение совместной системы линейных уравнений см. на сл.4 т.1-5. Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений определяются на сл.36 т.1-5. Критерий совместности системы линейных уравнений дает

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r(A|b)$ (т.е. когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы).

Так как ранг основной матрицы может быть меньше ранга расширенной матрицы только на 1, получаем такое

Следствие

Система линейных уравнений $Ax = b$ несовместна тогда и только тогда, когда $r(A) + 1 = r(A|b)$.

При решении конкретных систем линейных уравнений теорема Кронекера-Капелли применяется при завершении прямого хода в методе Гаусса-Жордана, когда основная и расширенная матрицы приведены к ступенчатому виду, что дает возможность легко определить ранг каждой из этих матриц.

Определение

Рангом совместной системы линейных уравнений $Ax = b$ называется число r : $r = r(A) = r(A|b)$.

Определение крамеровской системы линейных уравнений см. на сл.44 т.1-7. В дополнение к теореме Крамера (сл.46 т.1-7) справедливо следующее

Предложение

Если в крамеровской системе линейных уравнений главный определитель равен нулю, а по крайней мере один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то эта система несовместна.

↓ Из условия следует, что ранг по минорам основной матрицы меньше ее порядка, который обозначим через n . Вспомогательные определители отличаются от миноров порядка n расширенной матрицы быть может лишь знаком, поэтому ранг по минорам расширенной матрицы равен n . Следовательно, система несовместна. ↑

Если в крамеровской системе линейных уравнений главный определитель и все вспомогательные определители равны нулю, то она может быть как несовместна, так и иметь бесконечное множество решений. Рекомендуется привести пример для каждой ситуации.

Определение

Напомним, что система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Из результатов сл. 7 и 8 вытекает следующая

Теорема

Совместная система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ее ранг равен количеству неизвестных.

↓ В самом деле, у совместной системы линейных уравнений ранг равен рангу ее основной матрицы. Количество столбцов основной матрицы - это количество неизвестных системы. Ранг любой матрицы меньше либо равен количеству ее столбцов. Поэтому ранг системы может быть равен количеству неизвестных – тогда система определенная, или ранг системы может быть меньше количество неизвестных – тогда система имеет более одного решения. ↑

Напомним, что система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях этой системы равны нулю. Однородная система линейных уравнений всегда совместна и множество всех ее частных решений является подпространством (см. сл.5 т.2-4).

Определения

Это подпространство называется *пространством решений* однородной системы линейных уравнений, а любой базис этого подпространства – ее *фундаментальной системой решений* (ФСР).

Теорема

Пусть $Ax = O$ – матричная запись однородной системы линейных уравнений над полем F , где $A \in F^{k \times n}$ и U – пространство решений этой системы. Тогда $\dim U = n - r(A)$.

↓ Положим $r = r(A)$, $d = n - r$. Если $r = n$, то система имеет единственное решение (см. сл.6) – нулевое, т.е. $U = \{O\}$, и утверждение выполняется.

Чтобы найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$, следует сначала найти ее общее решение. Элементарные преобразования строк можно проводить в матрице A , так как нулевой столбец свободных членов при этих преобразованиях не изменяется. Если система имеет единственное (нулевое) решение, то ее подпространство решений – нулевое и фундаментальной системы решений не существует. Если в общем решении имеется d свободных неизвестных, то выбираем невырожденную матрицу S порядка d и по очереди придаем свободным неизвестным значения элементов одной строки матрицы S ; значения базисных неизвестных определяем из общего решения. Полученные d строк и будут образовывать одну из фундаментальных систем решений.

В алгоритме получается система из d линейно независимых решений, так как матрица S невырожденная. Число d – размерность пространства решений. В силу утверждения 2 теоремы сл.6 т.2-3 эта система будет базисом пространства решений.

В качестве матрицы S удобно брать единичную матрицу или диагональную матрицу с ненулевыми элементами на диагонали.

Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем основную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 28 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 25 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{cases} 4x_1 + 25x_3 + 9x_5 = 0, \\ x_2 - 5x_3 - x_5 = 0, \\ -3x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases} \quad \text{Общее решение:}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{25}{4}x_3 - \frac{9}{4}x_5, \\ x_2 = 5x_3 + x_5, \\ x_4 = \frac{3}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_5. \end{cases} \quad \text{Свободные неизвестные: } x_3, x_5. \text{ Матрица } S =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{ФСР: } \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -25 & 20 & 4 & 3 & 0 \\ -9 & 4 & 0 & 7 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} f_1 = (-25, 20, 4, 3, 0) \\ f_2 = (-9, 4, 0, 7, 4) \end{array}$$

↓ Запишем системы (2) и (3) сл.12 в матричной форме: $Ax = b$, $Ax = O$. Тогда $L = \{c \in F^n | Ac^T = b\}$, $U = \{u \in F^n | Au^T = O\}$. Пусть $c \in L$. Для любого $u \in U$ имеем $A(c + u)^T = Ac^T + Au^T = b + O = b$, т.е. $c + u \in L$. Таким образом, $c + U \subseteq L$. Убедимся, что $L \subseteq c + U$. Возьмем $x \in L$ и положим $u = x - c$. Так как $Ac^T = b$, $Ax^T = b$, имеем $A(x - c)^T = Ax^T - Ac^T = O$, т.е. $u \in U$. Мы видим, что $x = c + u$ и $x \in c + U$. Следовательно, $L \subseteq c + U$. Предложение доказано.↑

Связь между неоднородной и однородной системой линейных уравнений, выражаемую формулой $L = c + U$, можно представить **векторной записью** общего решения неоднородной системы линейных уравнений. А именно, любое решение $x \in L$ может быть записано в виде $x = c + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_d f_d$, где c – фиксированное частное решение из L , (f_1, \dots, f_d) – базис U , т.е. фундаментальная система решений однородной системы (3), $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ – произвольные скаляры, независимо друг от друга пробегающие поле F .

Пример векторной записи общего решения системы линейных уравнений

Пусть неоднородная система линейных уравнений имеет общее решение

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 - x_5, \\ x_2 = 1 + 5x_3 + x_5, \\ x_4 = 3 - 4x_3 + 7x_5. \end{cases}$$

Записать общее решение этой системы в векторной форме.

Имеем $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2 - x_3 - x_5, 1 + 5x_3 + x_5, x_3, 3 - 4x_3 + 7x_5, x_5) = (2, 1, 0, 3, 0) + (-x_3, 5x_3, x_3, -4x_3, 0) + (-x_5, x_5, 0, 7x_5, x_5) = (2, 1, 0, 3, 0) + x_3(-1, 5, 1, -4, 0) + x_5(-1, 1, 0, 7, 1)$. Векторная запись общего решения:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 3, 0) + \lambda(-1, 5, 1, -4, 0) + \mu(-1, 1, 0, 7, 1).$$

При этом $c = (2, 1, 0, 3, 0)$ — частное решение неоднородной системы, $f_1 = (-1, 5, 1, -4, 0)$, $f_2 = (-1, 1, 0, 7, 1)$ — ФСР соответствующей однородной системы линейных уравнений.

Будем говорить, что однородная система линейных уравнений задает (определяет) свое пространство решений. Возникает вопрос: любое ли подпространство пространства строк F^n задается некоторой однородной системой линейных уравнений от n неизвестных?

Теорема

Для любого подпространства $U \subseteq F^n$ существует однородная система линейных уравнений, которая задает U .

↓ Если $U = \{O\}$, то возьмем систему $x_j = 0, j = 1, \dots, n$. Если $U = F^n$, то возьмем систему $0x_1 + \dots + 0x_n = 0$. Пусть $\{O\} \subset U \subset F^n$. Выберем в U базис из строк u_1, \dots, u_d . Составим из этих строк матрицу A и рассмотрим однородную систему линейных уравнений $Ax = O$. Построим фундаментальную систему решений (f_1, \dots, f_r) ($r = n - d$) этой системы. Составим из строк f_1, \dots, f_r матрицу B . Докажем, что однородная система линейных уравнений $Bx = O$ задает U . Обозначим через V пространство решений системы $Bx = O$. По построению матрицы B имеем $u_1, \dots, u_d \in V$. Следовательно, $U \subseteq V$. Далее, $\dim U = d$ и $\dim V = n - r(B) = n - r = d$. Поэтому $\dim U = \dim V$ и $U = V$. ↑