

Тема 2-5: Ранг матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

В этой и следующей темах рассматриваются применения теории линейных пространств для получения определенной информации о матрицах и системах линейных уравнений.

Пусть F – поле, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица

из $F^{k \times n}$. Положим $a^{(i)} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ ($i = 1, \dots, k$). Тогда $a^{(i)} \in F^n$, $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ – система строк матрицы A .

Положим $a_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj})^T$ ($j = 1, \dots, n$). Тогда $a_j \in F_k$, (a_1, \dots, a_n) – система столбцов матрицы A .

Определение

Рангом матрицы A *по строкам* (соотв. *по столбцам*) называется ранг (т.е. размерность линейной оболочки) системы строк (соотв. столбцов) матрицы A .

Обозначения: $r_{\text{стр}}(A)$, $r_{\text{стлб}}(A)$. Имеем

$$r_{\text{стр}}(A) = \dim\langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \rangle, \quad r_{\text{стлб}}(A) = \dim\langle a_1, \dots, a_n \rangle.$$

Можно сказать, что ранг по строкам (соотв. по столбцам) матрицы A есть максимальное число линейно независимых строк (соотв. столбцов) матрицы A .

Напомним (см. сл.17 т.1-7), что **минором порядка m** матрицы A называется определитель квадратной подматрицы порядка m матрицы A . Если $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$, то $m \leq k$, n и минор матрицы A порядка m есть

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \dots & \alpha_{i_1 j_m} \\ \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \dots & \alpha_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_m j_1} & \alpha_{i_m j_2} & \dots & \alpha_{i_m j_m} \end{vmatrix}, \text{ где}$$

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq k$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$.

Минор 1-го порядка является элементом матрицы. У квадратной матрицы A порядка n единственным минором порядка n является ее определитель.

Определение ранга матрицы по минорам

Рангом матрицы A **по минорам** называется число 0 , если A – нулевая матрица и наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A , если A – ненулевая матрица.

Обозначение: $r_{\min}(A)$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найти ранги по строкам, по столбцам и по минорам.

Заметим, что $a^{(2)} = \frac{1}{2}(a^{(1)} + a^{(3)})$. Так как строки $a^{(1)}, a^{(3)}$ линейно независимы, имеем $r_{\text{стр}}(A) = 2$. По этой же причине все миноры 3-го порядка равны 0. Поскольку $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, заключаем, что $r_{\text{мин}}(A) = 2$. Чтобы найти ранг матрицы A по столбцам, проведем элементарные преобразования ее строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $a_3 = -a_1 + 2a_2$, $a_4 = -2a_1 + 3a_2$ и столбцы a_1, a_2 линейно независимы. Таким образом, $r_{\text{стлб}}(A) = 2$.

Для рассматриваемой матрицы A имеют место равенства

$$r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{мин}}(A).$$

Теорема следующего слайда показывает, что это не случайное совпадение.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеют место равенства

$$r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{мин}}(A).$$

Доказательство этого утверждения (см. сл.10) опирается на 4 леммы. С помощью этих лемм мы докажем, что $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$ и $r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$.

Лемма 1

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований строк, то $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стр}}(A')$ и $r_{\text{мин}}(A) = r_{\text{мин}}(A')$.

↓ Достаточно проверить утверждение леммы для одного элементарного преобразования. Если система векторов $(a'^{(1)}, \dots, a'^{(k)})$ получается из системы $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ с помощью одного элементарного преобразования, то очевидно, что $\langle a'^{(1)}, \dots, a'^{(k)} \rangle = \langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \rangle$, поэтому $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стр}}(A')$.

Докажем, что $r_{\text{мин}}(A) = r_{\text{мин}}(A')$. Если матрица A нулевая, то и матрица A' нулевая, и их ранги по минорам равны. Пусть матрица A ненулевая.

Если матрица A' получается из A с помощью перестановки двух строк, то это преобразование можно выполнить при помощи прибавления к одной строки другой и умножения строки на -1 , поэтому мы рассмотрим только следующие два элементарные преобразования.

Если матрица A' получается из A умножением одной строки на ненулевой скаляр λ , то миноры этих матриц $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ и

$A' \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ либо совпадают, либо отличаются множителем λ , поэтому $r_{\min}(A) = r_{\min}(A')$.

Пусть матрица A' получается из A прибавлением к i -й строке ℓ -й строки, умноженной на скаляр λ . Тогда для миноров $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ и

$A' \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ этих матриц может выполняться одно и только одно из условий:

- ① если $i \notin \{i_1, \dots, i_m\}$ или $i, \ell \in \{i_1, \dots, i_m\}$, то миноры совпадают;
- ② если $i \in \{i_1, \dots, i_m\}$ и $\ell \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, то минор

$A' \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j & \dots & j_m \end{pmatrix}$ равен сумме

$A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j & \dots & j_m \end{pmatrix} + \lambda A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & \ell & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j & \dots & j_m \end{pmatrix}$, которая является линейной комбинацией миноров матрицы A порядка m .

Отсюда следует, что $r_{\min}(A') \leq r_{\min}(A)$, так как если все миноры порядка m матрицы A равны 0, то и все миноры порядка m матрицы A' равны 0. Поскольку матрица A может быть получена из матрицы A' с помощью прибавления к i -й строке ℓ -й строки, умноженной на скаляр $-\lambda$, имеем $r_{\min}(A) \leq r_{\min}(A')$. Следовательно, $r_{\min}(A') = r_{\min}(A)$. Лемма доказана. \uparrow

Элементарные преобразования столбцов определяются так же, как и для строк (см. сл.26 т.1-5). Аналогично лемме 1 доказывается следующая

Лемма 2

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований столбцов, то $r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{стлб}}(A')$ и $r_{\text{мин}}(A) = r_{\text{мин}}(A')$.

Аналогично ступенчатой по строкам матрице (см. сл.27 т.1-5) определяется *ступенчатая по столбцам матрица*. Точно так же, как теорема сл.30 темы 1-5, доказывается следующее

Предложение

Пусть F – поле. Любая матрица $A \in F^{k \times n}$ с помощью элементарных преобразований столбцов может быть приведена к ступенчатой по столбцам матрице.

Лемма 3

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по строкам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$.

↓ Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$. Если матрица A нулевая, то доказывать нечего. Пусть $A \neq O$. Обозначим через r номер последней ненулевой строки матрицы A . Как и в доказательстве предложения сл.17 т.2-2, для каждого $i = 1, \dots, r$ обозначим через j_i наименьший индекс, для которого $\alpha_{ij_i} \neq 0$. Тогда при $1 < i \leq r$ и $1 \leq j < j_i$ имеем $\alpha_{ij} = 0$. Кроме того, $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Возьмем минор в строках $1, \dots, r$ и столбцах j_1, \dots, j_r . Это определитель верхнетреугольной матрицы с ненулевыми элементами на главной диагонали, поэтому он отличен от нуля. Миноры более высоких порядков или содержат нулевую строку и потому равны нулю, или не существуют (если $r = k$). Поэтому $r_{\text{мин}}(A) = r$. Так как ненулевые строки матрицы A в силу предложения сл.17 т.2-2 линейно независимы, их система образует базис пространства строк матрицы A . Поэтому $r_{\text{стр}}(A) = r$. Лемма доказана. ↑

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4

Пусть F – поле. Для любой ступечатой по столбцам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$.

Теперь докажем теорему о ранге матрицы. Пусть $A \in F^{k \times n}$ – произвольная матрица. Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A' . На основании лемм 1 и 3 заключаем, что $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стр}}(A') = r_{\text{мин}}(A') = r_{\text{мин}}(A)$, т.е. $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$. Используя предложение сл.8, приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований столбцов к ступенчатому по столбцам виду A'' . На основании лемм 2 и 4 заключаем, что $r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{стлб}}(A'') = r_{\text{мин}}(A'') = r_{\text{мин}}(A)$, т.е. $r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$. Таким образом, теорема доказана.

Определение ранга матрицы

Рангом матрицы $A \in F^{k \times n}$ называется число $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стлб}}(A) = r_{\text{мин}}(A)$, обозначаемое через $r(A)$.

Первое следствие вытекает из лемм 1 и 2.

Следствие 1

Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не изменяют ранга матрицы.

Второе следствие получается из лемм 3 и 4.

Следствие 2

Ранг ступенчатой по строкам (соотв. по столбцам) матрицы равен количеству ненулевых строк (соотв. столбцов) этой матрицы.

Из определения ранга по минорам получаем

Следствие 3

Ранг квадратной матрицы равен ее порядку тогда и только тогда, когда эта матрица невырожденная.

В качестве последнего следствия отметим теорему сл.13 т.2-3.

Из следствий 1 и 2 получается следующий алгоритм.

Чтобы определить ранг ненулевой матрицы A , следует с помощью элементарных преобразований строк или столбцов привести ее к ступенчатому по строкам виду и подсчитать количество ненулевых строк полученной матрицы. Это и будет ранг матрицы A .

Пример сл.5 показывает, как найти ранг согласно этому алгоритму. Нужно посмотреть часть, где производятся элементарные преобразования строк матрицы A .

Пусть F – поле.

Теорема

- 1 Для любых матриц $A, B \in F^{k \times n}$ имеет место $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.
- 2 Для любой матрицы $A \in F^{k \times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $r(\lambda A) = \begin{cases} r(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$
- 3 Для любой матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $r(A) = r(A^T)$.
- 4 Для любых матриц $A \in F^{k \times n}$, $B \in F^{n \times p}$ имеет место $r(A \cdot B) \leq r(A), r(B)$.
- 5 Для любой невырожденной матрицы $A \in F^{n \times n}$ и любых матриц $B \in F^{n \times k}$, $C \in F^{k \times n}$ имеют место равенства $r(A \cdot B) = r(B)$, $r(C \cdot A) = r(C)$.

↓ Докажем утверждение 1. Имеем $r(A + B) = r_{\text{стр}}(A + B) = \dim \langle a^{(1)} + b^{(1)}, \dots, a^{(k)} + b^{(k)} \rangle$. По определению суммы подпространств получаем $\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \dots, a^{(k)} + b^{(k)} \rangle \subseteq \langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \rangle + \langle b^{(1)}, \dots, b^{(k)} \rangle$. Значит, $\dim \langle a^{(1)} + b^{(1)}, \dots, a^{(k)} + b^{(k)} \rangle \leq \dim(\langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \rangle + \langle b^{(1)}, \dots, b^{(k)} \rangle)$, откуда по формуле сл.12 т.2-4 следует $\dim \langle a^{(1)} + b^{(1)}, \dots, a^{(k)} + b^{(k)} \rangle \leq \dim \langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)} \rangle + \dim \langle b^{(1)}, \dots, b^{(k)} \rangle$, т.е. $r_{\text{стр}}(A + B) \leq r_{\text{стр}}(A) + r_{\text{стр}}(B)$, что и требуется.

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m . Утверждение 3 следует из того, что $r_{\text{стр}}(A) = r_{\text{стлб}}(A^T)$.

Для доказательства утверждения 4 рассмотрим матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$ и $B = (\beta_{ij})_{n \times p}$. Запишем произведение $C = A \cdot B$:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1p} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{np} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1p} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1}\beta_{11} + \dots + \alpha_{kn}\beta_{n1} & \alpha_{k1}\beta_{12} + \dots + \alpha_{kn}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{k1}\beta_{1p} + \dots + \alpha_{kn}\beta_{np} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что i -я строка матрицы C равна линейной комбинации строк матрицы B : $c^{(i)} = \alpha_{i1}b^{(1)} + \dots + \alpha_{in}b^{(n)}$, поэтому $r_{\text{стр}}(C) \leq r_{\text{стр}}(B)$. Кроме того, j -й столбец матрицы C равен линейной комбинации столбцов матрицы A : $c_j = \beta_{1j}a_1 + \dots + \beta_{nj}a_n$, поэтому $r_{\text{стлб}}(C) \leq r_{\text{стлб}}(A)$.

Докажем утверждение 5. Согласно утверждению 4 имеем $r(A \cdot B) \leq r(B)$. Так как матрица A невырожденная, согласно теореме сл.36 т.1-7 она обратимая и $B = A^{-1} \cdot (A \cdot B)$, поэтому по утверждению 4 $r(B) \leq r(A \cdot B)$. Значит, $r(A \cdot B) = r(B)$. Аналогично доказывается, что $r(C \cdot A) = r(A)$.

Теорема доказана. ↑

Дополнительные свойства ранга матрицы и другое доказательство свойства 4 теоремы сл.13 приведены в т.2-9 (сл.9).