Тема 2-3: Базис и размерность линейного пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Определение

Линейное пространство V над полем F называется *конечномерным*, если $V = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ для некоторой системы векторов $a_1, \ldots, a_k \in V$. При этом говорят, что линейное пространство V *порождается* системой векторов $(a_1, \ldots, a_k)$.

Таким образом, каждый вектор конечномерного линейного пространства V является линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_k$.

Очевидными примерами конечномерных пространств являются:

1. нулевое пространство $\{0_V\}$;
2. пространства геометрических векторов на прямой V_ℓ, на плоскости V_π, всех геометрических векторов V_g;
3. пространства матриц $F^{k \times n}$.

Примеры пространств, не являющихся конечномерными, будут приведены ниже (сл.8).

Понятие базиса и размерности линейного пространства

Определение базиса

Базисом линейного пространства V называется система векторов $B = (b_1, \ldots, b_n)$ из V такая что

1. B упорядочена, т.е. при перестановке векторов в системе мы получим другой базис;
2. B линейно независима;
3. B порождает V, т.е. $V = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.

Из определения базиса следует, что линейное пространство, имеющее базис, является конечномерным. Из предложения сл.10 т.2-2 вытекает, что любое ненулевое конечномерное пространство имеет базис. Утверждение сл.9 т.2-2 влечет за собой, что любые два базиса одного и того же ненулевого линейного пространства состоят из одинакового числа векторов. Это число не зависит от выбора базиса и потому является характеристикой линейного пространства.

Определение размерности

Размерностью конечномерного линейного пространства V называется количество векторов в базисе V, если $V \neq \{0_V\}$, и 0, если $V = \{0_V\}$.

Размерность линейного пространства V обозначается через $\dim V$.

Примеры

Пространства геометрических векторов

Базисы пространств V_ℓ, V_π, V_g в смысле определения сл.3 являются базисами на прямой, на плоскости и в пространстве в смысле определений из аналитической геометрии. Поэтому $\dim V_\ell = 1$, $\dim V_\pi = 2$, $\dim V_g = 3$.

Пространства матриц

Базисом пространства $F^{k\times n}$ является система матричных единиц E_{ij} размеров $k \times n$ (такая матрица имеет размеры $k \times n$, все элементы которой, кроме $a_{ij} = 1$, равны 0). Поэтому $\dim F^{k\times n} = k \cdot n$.

Пространства строк

Базисом пространства строк F^n является система $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,…,$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ из строк единичной матрицы порядка n. Этот базис называется *стандартным базисом* пространства строк F^n. Имеем $\dim F^n = n$.

Пространства многочленов ограниченной степени

Базисом пространства VP_n всех многочленов степени не выше n является система $(1, x, \ldots, x^n)$, поэтому $\dim VP_n = n + 1$.

Некоторые множества векторов можно рассматривать как линейные пространства над различными полями. Например, если V – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, то V можно рассматривать и как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поэтому имеет смысл сделать

Уточнение обозначения

Размерность линейного пространства V над полем F обозначим $\dim_F V$.

Размерность поля комплексных чисел

Базисом линейного пространства $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ является система $(1, i)$, поэтому $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.

Размерность поля над собой

Любое поле F является линейным пространством над самим собой с базисом 1, поэтому $\dim_F F = 1$.

О размерности пространства функций

Найти условия, при которых пространство функций $\mathcal{F}(X, F)$ (см. сл.5 т.2-1) конечномерно, и в этом случае определить $\dim_F \mathcal{F}(X, F)$.

Теорема

Пусть V – линейное пространство размерности n над полем F. Тогда

1. любая система из m векторов пространства V при $m > n$ является линейно зависимой;
2. при $n > 0$ любая линейно независимая система из n векторов является базисом пространства V;
3. при $n > 0$ если $V = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, то $(a_1, \ldots, a_n)$ является базисом V;
4. при $n > 1$ любая линейно независимая система из k векторов $(k < n)$ может быть дополнена до базиса V.

$\Downarrow$ Если V – нулевое пространство, то любая система его векторов содержит 0_V и потому линейно зависима (сл.2 т.2-2). Если V – ненулевое, то оно имеет базис из n векторов. Любая система векторов из V линейно выражается через его базис, поэтому утверждение 1 следует из свойства 4 (сл.8 т.2-2).
Если $(a_1, \ldots, a_n)$ – линейно независимая система, то для любого $x \in V$ в силу утверждения 1 система $(a_1, \ldots, a_n, x)$ будет линейно зависима, и из свойства 3 (сл.7 т.2-2) вытекает, что $(a_1, \ldots, a_n) \vdash x$. Таким образом, $V = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, и для системы $(a_1, \ldots, a_n)$ выполняются все условия определения базиса.

Окончание доказательства

Пусть $V = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Рассмотрим систему $(a_1, \ldots, a_n)$. Чтобы доказать, что это базис, достаточно установить ее линейную независимость. Если система $(a_1, \ldots, a_n)$ линейно зависима, то V порождается системой менее чем из n векторов, и потому все системы из n векторов в V линейно зависимы, что противоречит равенству $\dim V = n$.
Пусть $k < n$ и $(a_1, \ldots, a_k)$ – линейно независимая система векторов. Возьмем произвольный базис $(b_1, \ldots, b_n)$ пространства V и рассмотрим систему $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n)$. Очевидно, что $V = \langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_n \rangle$. В силу утверждения 1 полученная система линейно зависима. Выберем в ней вектор, который линейно выражается через предыдущие вектора. Такой вектор существует и он принадлежит базису, так как в системе $(a_1, \ldots, a_k)$ ни один вектор не выражается через предыдущие. Исключив этот вектор, получим систему из $k + n - 1$ вектора, которая порождает V. Если $k = 1$, то эта система является базисом в силу утверждения 3. При $k > 1$ полученная система будет линейно зависима, и к ней можно применить аналогичные рассуждения. Пока будут получаться системы, содержащие более n векторов, из них можно будет исключать вектор, который линейно выражается через предыдущие вектора, и полученные системы будут порождать V. Когда получится система из n векторов, она будет базисом V, и ее первые k векторов – $a_1, \ldots, a_k$.
Теорема доказана. $\Uparrow$

Следствие

Если линейное пространство имеет линейно независимые системы, содержащие n векторов для любого натурального числа n, то это пространство не является конечномерным.

Линейное пространство, не являющееся конечномерным, называется *бесконечномерным*.

Линейное пространство $F[x]$ всех многочленов над полем F является бесконечномерным.

Ясно, что система многочленов $1, x, \ldots, x^{n-1}$ линейно независима и она состоит из n векторов для любого натурального числа n.

Пусть V – линейное пространство, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – его базис. Для вектора $x \in V$ и некоторых скаляров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in F$ имеем

$$x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_n b_n. \tag{1}$$

Покажем, что скаляры $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ определяются по вектору x однозначно. Пусть $x = \varsigma_1 b_1 + \varsigma_2 b_2 + \ldots + \varsigma_n b_n$ для некоторых скаляров $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_n \in F$. Вычитая это равенство из равенства (1), получаем $0_V = (\xi_1 - \varsigma_1) b_1 + (\xi_2 - \varsigma_2) b_2 + \ldots + (\xi_n - \varsigma_n) b_n$. Так как система B линейно независима, заключаем, что $\xi_i - \varsigma_i = 0$, т.е. $\xi_i = \varsigma_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение

Скаляры $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются *координатами* вектора x в базисе B.

Записывать координаты будем в виде столбца и обозначать через $[x]_B = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^\top$. Будем использовать матричную запись равенства (1) (см. сл.9 т.2-1):

$$x = B \cdot [x]_B. \tag{2}$$

Для любой конечной системы векторов $A = (a_1, \ldots, a_k)$ запишем $A = B \cdot \Gamma$, где $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times k}$ — матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов $a_1, \ldots, a_k$, записанные по порядку. Если $B \cdot \Gamma = B \cdot \Delta$ для некоторой матрицы Δ, то $\Gamma = \Delta$ в силу единственности координат.

Пусть $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис линейного пространства V над полем F. Тогда для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in F$ справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
[x + y]_B &= [x]_B + [y]_B; &(3)\\
[\alpha x]_B &= \alpha [x]_B. &(4)
\end{aligned}
$$

Пусть $x = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n$, $y = \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_n b_n$, т.е. $[x]_B = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^\top$, $[y]_B = (\delta_1, \dots, \delta_n)^\top$. Тогда
$x + y = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n + \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_n b_n = (\gamma_1 + \delta_1) b_1 + \ldots + (\gamma_n + \delta_n) b_n$,
и в силу единственности координат
$[x + y]_B = (\gamma_1 + \delta_1, \dots, \gamma_n + \delta_n)^\top = [x]_B + [y]_B$. Равенство (3) доказано.
Для доказательства (4) запишем
$\alpha x = \alpha(\gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n) = (\alpha\gamma_1) b_1 + \ldots + (\alpha\gamma_n) b_n$, откуда
$[\alpha x]_B = (\alpha\gamma_1, \dots, \alpha\gamma_n)^\top = \alpha [x]_B$.

Определение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F. *Изоморфизмом* пространства U на V называется отображение $\varphi : U \longrightarrow V$, которое является биекцией множества U на V и *линейным* отображением, т.е. для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in F$ справедливы равенства
$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.
Линейные пространства U и V называются *изоморфными*, если существует изоморфизм U на V.

Теорема

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F. Тогда V изоморфно пространству столбцов F_n и арифметическому пространству F^n.

$\Downarrow$ Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – некоторый базис линейного пространства V. Определим отображение $\varphi : V \longrightarrow F_n$, полагая $\varphi(x) = [x]_B$ для любого $x \in V$. Очевидно, φ является сюръективным отображением множества V на F_n. Его инъективность следует из единственности координат, а линейность обеспечивается свойствами координат (равенствами (3) и (4)) сл.10. Таким образом, φ – изоморфизм. Очевидно, что отображение $x \mapsto x^\top$ для $x \in F_n$ является изоморфизмом пространства F_n на пространство F^n, что завершает доказательство. $\Uparrow$

Вычисления с координатами

Из свойств координат (или того факта, что n-мерное линейное пространство над полем F изоморфно пространству F_n) вытекают следующие утверждения.

Предложение 1

Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис линейного пространства V над полем F, $a_1, \ldots, a_k, c \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$. Тогда равенство $c = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ имеет место в пространстве V тогда и только тогда, когда $[c]_B = \lambda_1[a_1]_B + \ldots + \lambda_k[a_k]_B$ в пространстве столбцов F_n.
В частности, система векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ линейно зависима (соотв. линейно независима) тогда и только тогда, когда система столбцов $([a_1]_B, \ldots, [a_k]_B)$ линейно зависима (соотв. линейно независима).

Предложение 2

Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис линейного пространства V над полем F. Система векторов $(c_1, \ldots, c_n)$ является базисом пространства V тогда и только тогда, когда система столбцов $([c_1]_B, \ldots, [c_n]_B)$ является базисом в пространстве столбцов F_n.

Теорема

Пусть F – поле, n – натуральное число. Для любой матрицы $A \in F^{n\times n}$ следующие условия эквивалентны:
(1) система строк матрицы A линейно независима;
(2) система столбцов матрицы A линейно независима;
(3) матрица A невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$).

$\Downarrow$ Докажем, что (2) $\Leftrightarrow$ (3). Из предложения сл.12 т.2-2 следует, что если система столбцов матрицы A линейно независима, то с помощью элементарных преобразований строк ее можно привести к ступенчатому виду без ненулевых строк (с ненулевыми элементами на главной диагонали), поэтому $|A| \neq 0$. Верно и обратное утверждение: если $|A| \neq 0$, то с помощью элементарных преобразований строк матрицу A можно привести к единичной матрице, поэтому система столбцов матрицы A линейно независима.
Эквивалентность условий (1) и (3) следует из того, что при транспонировании матрицы ее строки становятся столбцами транспонированной матрицы, а определитель не изменяется. $\Uparrow$

Пусть в линейном пространстве V заданы два базиса $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Как связаны между собой координаты одного вектора x в этих базисах? Для выяснения этого потребуется понятие *матрицы перехода*. Разложим векторы $c_1, \ldots, c_n$ по базису B:

$$\begin{aligned} c_1 &= \tau_{11} b_1 + \tau_{21} b_2 + \ldots + \tau_{n1} b_n, \\ c_2 &= \tau_{12} b_1 + \tau_{22} b_2 + \ldots + \tau_{n2} b_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= \tau_{1n} b_1 + \tau_{2n} b_2 + \ldots + \tau_{nn} b_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Определение

Матрица $T_{B,C} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса B к базису C.

Столбцами матрицы перехода $T_{B,C}$ являются столбцы координат $[c_1]_B, [c_2]_B, \ldots, [c_n]_B$. Система равенств (5) может быть записана в матричном виде: $C = B \cdot T_{B,C}$.

Пусть $x \in V$, $x = B \cdot [x]_B$, $x = C \cdot [x]_C$. Имеем
$x = C \cdot [x]_C = (B \cdot T_{B,C}) \cdot [x]_C = B \cdot (T_{B,C} \cdot [x]_C)$, откуда
$B \cdot [x]_B = B \cdot (T_{B,C} \cdot [x]_C)$. Следовательно, имеют место

Формулы преобразования координат при замене базиса в матричной форме

$$[x]_B = T_{B,C} \cdot [x]_C.$$

Пусть $[x]_B = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $[x]_C = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)^\top$. Записав равенство
$[x]_B = T_{B,C} \cdot [x]_C$ в развернутом виде, получим

Формулы преобразования координат при замене базиса в развернутом виде

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_{11}\varsigma_1 + \tau_{12}\varsigma_2 + \ldots + \tau_{1n}\varsigma_n, \\ \xi_2 = \tau_{21}\varsigma_1 + \tau_{22}\varsigma_2 + \ldots + \tau_{2n}\varsigma_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_n = \tau_{n1}\varsigma_1 + \tau_{n2}\varsigma_2 + \ldots + \tau_{nn}\varsigma_n. \end{cases}$$

Теорема

Матрица перехода $T_{B,C}$ от базиса B к базису C является обратимой матрицей и обратная матрица $T_{B,C}^{-1} = T_{C,B}$.

$\Uparrow$ Из равенства $C = B \cdot T_{B,C}$ и аналогичного равенства $B = C \cdot T_{C,B}$ получаем $B \cdot E_n = B = C \cdot T_{C,B} = (B \cdot T_{B,C}) \cdot T_{C,B} = B \cdot (T_{B,C} \cdot T_{C,B})$, т.е. $B \cdot E_n = B \cdot (T_{B,C} \cdot T_{C,B})$. Следовательно, в силу единственности координат $E_n = T_{B,C} \cdot T_{C,B}$. Аналогично доказывается, что $E_n = T_{C,B} \cdot T_{B,C}$. Таким образом, матрица $T_{B,C}$ обратима по определению (см. сл.27 т.1-6) и обратная к ней есть матрица $T_{C,B}$. $\Uparrow$

Зафиксируем в линейном пространстве V базис $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Для любой невырожденной матрицы T система векторов $B \cdot T$ является линейно независимой и содержит n векторов, где $n = \dim V$, поэтому C является базисом пространства V. Таким образом, между невырожденными матрицами порядка n и базисами пространства V существует биекция.

Предположим, что в линейном пространстве V размерности n над полем F заданы два базиса B и C координатами своих векторов в исходном базисе A.

Описание алгоритма

Составим матрицу размеров $n \times 2n$, записав в виде столбцов сначала координаты всех векторов базиса B, и затем приписав к ним координаты всех векторов базиса C. С помощью элементарных преобразований строк приведем полученную матрицу к виду $(E_n|T)$, так что на месте координат векторов базиса B окажется единичная матрица порядка n. Тогда на месте координат векторов базиса C окажется матрица перехода T от базиса B к базису C.

Обоснование этого алгоритма получается с помощью алгоритма со сл.14 т.2-2. Нужно принять во внимание, что матрица перехода от базиса A к базису B является невырожденной, и потому с помощью элементарных преобразований строк может быть приведена к единичной матрице.

Найти матрицу перехода от базиса $b_1 = (1, 2), b_2 = (2, 3)$ к базису $c_1 = (5, -8), c_2 = (-4, 7)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^2$ и записать формулы преобразования координат.

Используем алгоритм предыдущего слайда, составив матрицу из столбцов координат векторов b_1, b_2, c_1, c_2: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -8 & 7 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -18 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -31 & 26 \\ 0 & 1 & 18 & -15 \end{array}\right)$. Таким образом, $T_{b,c} = \begin{pmatrix} -31 & 26 \\ 18 & -15 \end{pmatrix}$ и формулы преобразования координат имеют вид :

$$\begin{cases} \xi_1 = -31\varsigma_1 + 26\varsigma_2; \\ \xi_2 = 18\varsigma_1 - 15\varsigma_2, \end{cases}$$

где для любого $x \in \mathbb{R}^2$, $x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2$ и $x = \varsigma_1 c_1 + \varsigma_2 c_2$.

Определение рекуррентного соотношения см. на сл.17 т.2-1. Пусть F – поле. Обозначим через V пространство всех решений рекуррентного соотношения

$$x_{m+k} = \lambda_m x_{m+k-1} + \lambda_{m-1} x_{m+k-2} + \ldots + \lambda_2 x_{k+1} + \lambda_1 x_k, \tag{6}$$

где λ_j – элементы поля F $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Предложение

Пространство V имеет размерность m.

$\Downarrow$ Для каждого $j = 1, \ldots, m$ обозначим через $a_j = \{\alpha_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$ решение рекуррентного соотношения (6) с начальными условиями $(k = 1, \ldots, m)$ $\alpha_{jk} = \begin{cases} 1, k = j; \\ 0, k \neq j. \end{cases}$ Покажем, что $(a_1, \ldots, a_m)$ – базис V. Очевидно, что эта система векторов линейно независима. Покажем, что $V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$. Пусть $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$. Убедимся, что $x = \sum_{s=1}^{m} \xi_s a_s$. Для этого индукцией по k докажем, что $\xi_k = \sum_{s=1}^{m} \xi_s \alpha_{sk}$. Для всех $k = 1, \ldots, m$ это следует из определения последовательностей a_j. Предположим, что для всех $1 \leq k < m + p$ утверждение уже доказано. Докажем его для $k = m + p$: $\xi_{m+p} = \sum_{t=1}^{m} \lambda_{m-t+1} \xi_{m+p-t} = \sum_{t=1}^{m} \lambda_{m-t+1} \sum_{s=1}^{m} \xi_s \alpha_{s,m+p-t} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \lambda_{m-t+1} \xi_s \alpha_{s,m+p-t} = \sum_{s=1}^{m} \xi_s \sum_{t=1}^{m} \lambda_{m-t+1} \alpha_{s,m+p-t} = \sum_{s=1}^{m} \xi_s \alpha_{s,m+p}$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

В силу предложения сл.19 любое решение рекуррентного соотношения (6) может быть получено как линейная комбинация системы из m линейно независимых решений. Искать такие системы можно среди геометрических прогрессий. Рассмотрим последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x \in F$, $x \neq 0$. Подставим в (6): $x^{m+k} = \lambda_m x^{m+k-1} + \lambda_{m-1} x^{m+k-2} + \ldots + \lambda_2 x^{k+1} + \lambda_1 x^k$. Сократив на x^k, получим $x^m = \lambda_m x^{m-1} + \lambda_{m-1} x^{m-2} + \ldots + \lambda_2 x + \lambda_1$.

Определение

Уравнение $x^m - \lambda_m x^{m-1} - \lambda_{m-1} x^{m-2} - \ldots - \lambda_2 x - \lambda_1 = 0$ называется *характеристическим* для рекуррентного соотношения (6).

Каждое ненулевое решение характеристического уравнения определяет решение рекуррентного соотношения (6), причем различные решения характеристического уравнения определяют линейно независимые решения рекуррентного соотношения. В случае поля $\mathbb{C}$ характеристическое уравнение имеет m корней с учетом кратности. Если все его корни различны, то получаем m линейно независимых решений рекуррентного соотношения (6). Если корень ξ имеет кратность $p > 1$, то линейно независимыми будут решения $\{\xi^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n\xi^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^2\xi^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\ldots$, $\{n^{p-1}\xi^n\}_{n=1}^{\infty}$. Из таких решений для каждого кратного корня характеристического уравнения можно собрать базис пространства решений рекуррентного соотношения (6). Эти утверждения мы не доказываем.

Пример

Найти формулу для чисел Фибоначчи (сл.18 т.2-1).

Из рекуррентного соотношения $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ получаем характеристическое уравнение $x^2 - x - 1 = 0$. Его корни $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Базис пространства решений образуют последовательности $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ и $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Будем искать решение в виде $C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, где C_1, C_2 – постоянные. Так как $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, для определения C_1, C_2 получаем систему уравнений $\begin{cases} C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1, \\ C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 1. \end{cases}$ Решив эту систему, получим $C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Таким образом, для чисел Фибоначчи получаем формулу $x_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}$.