Тема 2-20: Аффинные пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Понятие аффинного пространства является обобщением понятия пространства точек в аналитической геометрии.

Пусть F – поле, $\vec{V}$ – конечномерное линейное пространство над F, V – непустое множество (его элементы называются *точками* и обозначаются малыми латинскими буквами), $+ : V \times \vec{V} \longrightarrow V$ – отображение (операция откладывания вектора от точки). Элементы пространства $\vec{V}$ называются, как обычно, векторами, и обозначаются в этой теме малыми латинскими буквами со стрелками: $\vec{a}$.

Определение

Аффинным пространством над полем F называется тройка $V = (V, \vec{V}, +)$, если выполняются следующие условия:

1. $\forall p \in V \; \forall \vec{x} \in \vec{V} \; \exists! q \in V : \quad p + \vec{x} = q$,
2. $\forall p \in V \; \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} : \quad (p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$,
3. $\forall p, q \in V \; \exists! \vec{x} \in \vec{V} : \quad p + \vec{x} = q$ (обозначение: $\vec{x} = \overrightarrow{pq} = q - p$).

Размерностью аффинного пространства $V = (V, \vec{V}, +)$ называется $\dim \vec{V}$. Обозначение: $\dim V$.

Примеры аффинных пространств

1. Геометрическое пространство

Множество точек – множество всех точек, рассматриваемых в геометрии; линейное пространство – V_g; операция откладывания вектора от точки определена в аналитической геометрии (сл.6 т.1-12), здесь мы считаем, что $A + \overrightarrow{AB} = B$ для любых точек A, B.

2. Аффинное арифметическое пространство над полем F

$V = (F^n, \overrightarrow{F^n}, +)$.

Элементы множества F^n рассматриваются и как точки, и как векторы, во втором случае используется обозначение $\overrightarrow{F^n}$. Если $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, $\vec{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \overrightarrow{F^n}$, то по определению $p + \vec{x} = q$, где $q = (\alpha_1 + \xi_1, \ldots, \alpha_n + \xi_n) \in F^n$.

3. Аффинное арифметическое пространство над полем $\mathbb{R}$

$V = (\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +)$.

4. Аффинное арифметическое пространство над полем $\mathbb{C}$

$V = (\mathbb{C}^n, \overrightarrow{\mathbb{C}^n}, +)$.

Предложение

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F. Тогда для любых $p, q, r \in V$ справедливы равенства

1. $p + \vec{0} = p$,
2. $p + \overrightarrow{pq} = q$,
3. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$,
4. $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$.

$\Downarrow$ Для доказательства утверждения 1 используем аксиому 1 определения аффинного пространства (сл.3): существует единственный вектор $\vec{x} \in \vec{V}$ такой что $p + \vec{x} = p$. Тогда по аксиоме 2
$p + \vec{0} = (p + \vec{x}) + \vec{0} = p + (\vec{x} + \vec{0}) = p + \vec{x} = p$, т.е. $p + \vec{0} = p$.
Второе равенство следует из аксиомы 3.
Для доказательства утверждения 3 используем аксиому 2 и утверждение 2: имеем $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r$, т.е. $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = r$.
Отсюда в силу аксиомы 3 следует утверждение 3.
Чтобы доказать утверждение 4, заметим, что $p + \overrightarrow{pq} = q$, $q + \overrightarrow{qp} = p$, откуда $p = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qp} = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp})$, т.е. $p = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp})$.
Следовательно, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \vec{0}$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F, $\dim V = n$.

Определение

Репером (или *системой координат*) в аффинном пространстве V называется совокупность $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ из точки $o \in V$ и базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ линейного пространства $\vec{V}$.
Координатами точки $p \in V$ в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называются координаты вектора $\overrightarrow{op}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ линейного пространства $\vec{V}$. Обозначение: $p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ или $[p] = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$; таким образом, $\overrightarrow{op} = \gamma_1\vec{e}_1 + \ldots + \gamma_n\vec{e}_n$. Вектор $\overrightarrow{op}$ называется *радиус-вектором* точки p.

Предложение

Если в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ даны координаты точек $p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $q(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, то координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ суть $[\overrightarrow{pq}] = (\delta_1 - \gamma_1, \ldots, \delta_n - \gamma_n)^\top$.

В самом деле, согласно утверждению 2 предложения сл.5 имеем $\overrightarrow{op} + \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq}$, откуда непосредственно следует требуемое.

Пусть в аффинном пространстве $V = (V, \vec{V}, +)$ заданы реперы $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и $(o'; \vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$. Найдем связь между координатами $[p]$ и $[p]'$ точки p в этих реперах, предполагая известными координаты $[o']$ в репере $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и матрицу перехода $T = (\tau_{ij})_{n\times n}$ от базиса $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к базису $B' = (\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n')$. Тогда $B' = B \cdot T$. Согласно утверждению 2 предложения сл.5 имеем $\overrightarrow{op} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'p}$, откуда $B \cdot [\overrightarrow{op}] = B \cdot [\overrightarrow{oo'}] + B' \cdot [\overrightarrow{o'p}] = B \cdot [\overrightarrow{oo'}] + (B \cdot T) \cdot [\overrightarrow{o'p}] = B \cdot [\overrightarrow{oo'}] + B \cdot (T \cdot [\overrightarrow{o'p}]) = B \cdot ([\overrightarrow{oo'}] + T \cdot [\overrightarrow{o'p}])$. Таким образом, $B \cdot [\overrightarrow{op}] = B \cdot ([\overrightarrow{oo'}] + T \cdot [\overrightarrow{o'p}])$, и потому $[\overrightarrow{op}] = [\overrightarrow{oo'}] + T \cdot [\overrightarrow{o'p}]$, откуда получаются

Формулы преобразования координат точки при замене репера

$$[p] = [o'] + T \cdot [p]', \quad [p]' = T^{-1} \cdot ([p] - [o']).$$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F, $\dim V = n$.

Определение

Пусть $p \in V$, $\vec{U} \subseteq \vec{V}$ – подпространство. Тогда множество $U = \{p + \vec{x} | \vec{x} \in \vec{U}\}$ называется *плоскостью* (или *линейным многообразием*) с *начальной точкой* p и *направляющим подпространством* $\vec{U}$.
Обозначение: $U = p + \vec{U}$.

Легко видеть, что тогда $U = (U, \vec{U}, +)$ будет аффинным пространством. Его можно назвать аффинным подпространством аффинного пространства V. *Размерностью* плоскости U называется $\dim \vec{U}$.
Обозначение: $\dim U$. Если $\dim U = 0$, то $U = \{p\}$ также называется *точкой*, при $\dim U = 1$ U также называется *прямой*.
Заметим, что начальная точка всегда принадлежит плоскости.
Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k)$ — некоторый базис подпространства $\vec{U}$. Тогда $x \in U \iff \exists \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in F : x = p + \xi_1 \vec{b}_1 + \xi_2 \vec{b}_2 + \ldots + \xi_k \vec{b}_k$.

Определение

Уравнение $x = p + \xi_1 \vec{b}_1 + \xi_2 \vec{b}_2 + \ldots + \xi_k \vec{b}_k$ называется *векторным уравнением* плоскости U.

Предложение

1. Если $U = p + \vec{U}$, то для любой точки $q \in U$ справедливо $U = q + \vec{U}$.
2. Если $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$, то $U \subseteq W$ тогда и только тогда, когда $\vec{U} \subseteq \vec{W}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$.
3. Если $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$, то $U = W$ тогда и только тогда, когда $\vec{U} = \vec{W}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$.

$\Downarrow$ Покажем, что $U \subseteq q + \vec{U}$. Положим $\vec{x} = \overrightarrow{pq}$, тогда $p + \vec{x} = q$. Для любой точки $r \in U$ имеем $r = p + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$, и
$r = p + \vec{x} + (\vec{y} - \vec{x}) = q + (\vec{y} - \vec{x})$, т.е. $r \in q + \vec{U}$.
Покажем, что $q + \vec{U} \subseteq U$. Если $r \in q + \vec{U}$, то $r = q + \vec{z}$, где $\vec{z} \in \vec{U}$, откуда $r = (p + \vec{x}) + \vec{z} = p + (\vec{x} + \vec{z}) \in U$. Утверждение 1 доказано.
Предположим, что $U \subseteq W$. Так как $p \in U$, имеем $p \in W$ и $W = p + \vec{W}$ согласно утверждению 1. Отсюда $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$, так как $q \in W$ и $q = p + \overrightarrow{pq}$.
Далее, для любого $\vec{x} \in \vec{U}$ имеем $p + \vec{x} \in U$, откуда $p + \vec{x} \in W$ и $\vec{x} \in \vec{W}$.
Таким образом, $\vec{U} \subseteq \vec{W}$.
Предположим, что $\vec{U} \subseteq \vec{W}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$. Тогда для любого $\vec{x} \in \vec{U}$ имеем
$p + \vec{x} = p + (\overrightarrow{pq} + \vec{x} - \overrightarrow{pq}) = (p + \overrightarrow{pq}) + (\vec{x} - \overrightarrow{pq}) = q + (\vec{x} - \overrightarrow{pq}) \in W$, так как $\vec{x}, \overrightarrow{pq} \in \vec{W}$. Утверждение 2 доказано.
Утверждение 3 непосредственно следует из утверждения 2. $\Uparrow$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F и $\mathrm{char}(F) \neq 2$.

Лемма

Для любых различных точек p, q аффинного пространства существует единственная прямая, содержащая эти точки. Обозначение: (p, q).

$\Downarrow$ Пусть $U = p + \vec{U}$, где $\vec{U} = \langle \overrightarrow{pq} \rangle$. Тогда $\dim U = 1$, поскольку $\overrightarrow{pq} \neq \vec{0}$, и $q \in U$. Пусть $W = r + \vec{W}$ – произвольная прямая, содержащая p и q. Тогда согласно утверждению 1 предложения сл.9 $W = p + \vec{W}$. Далее, $\overrightarrow{pq} \in \vec{W}$, поскольку $q \in W$. Так как $\overrightarrow{pq} \neq \vec{0}$ и $\dim \vec{W} = 1$, заключаем, что $\vec{W} = \langle \overrightarrow{pq} \rangle$.$\Uparrow$

Теорема

Непустое множество точек U аффинного пространства является плоскостью тогда и только тогда, когда либо $U = \{p\}$, либо для любых различных точек $p, q \in U$ имеет место $(p, q) \subseteq U$.

$\Downarrow$ Пусть U – плоскость, содержащая более одной точки, и $p, q \in U$, $p \neq q$. Тогда $U = p + \vec{U}$, и потому $\overrightarrow{pq} \in \vec{U}$, откуда следует $(p, q) \subseteq U$.

Окончание доказательства теоремы

Пусть $U \subseteq V$, $|U| > 1$ и для любых различных точек $p, q \in U$ имеет место $(p, q) \subseteq U$. Зафиксируем $p \in U$. Положим $\vec{U} = \{\vec{x} \in \vec{V} | p + \vec{x} \in U\}$ и покажем, что $\vec{U}$ – подпространство $\vec{V}$. Так как $p \in U$, имеем $\vec{0} \in \vec{U}$. Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{U}$, причем $\vec{x} \neq \vec{y}$. Тогда по условию $(p + \vec{x}, p + \vec{y}) \subseteq U$. Следовательно, $p + \vec{x} + \langle \vec{y} - \vec{x} \rangle \subseteq U$ и $\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x}) \in \vec{U}$ при любом $\lambda \in F$. Взяв $\vec{x} = \vec{0}$, получаем, что для любого $\vec{y} \in \vec{U}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ и любого $\lambda \in F$ имеет место $\lambda\vec{y} \in \vec{U}$, т.е. $\vec{U}$ замкнуто относительно умножения на любой скаляр из F.
Для различных $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{U}$ при $\lambda = \frac{1}{2}$ (здесь используется предположение, что $\operatorname{char}(F) \neq 2$) получаем $\vec{x} + \lambda(\vec{y} - \vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} \in \vec{U}$, откуда следует $\vec{x} + \vec{y} \in \vec{U}$. Поскольку $\vec{x} + \vec{x} = 2\vec{x} \in \vec{U}$, заключаем, что $\vec{U}$ замкнуто относительно сложения. Следовательно, $\vec{U}$ – подпространство. Теорема доказана. $\Uparrow$

Следствие

Пересечение любого множества плоскостей, если оно не пусто, является плоскостью.

В самом деле, такое пересечение, если оно не пусто, удовлетворяет условиям теоремы сл.10.

Теорема

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$ – плоскости в аффинном пространстве $V = (V, \vec{V}, +)$. Плоскости U и W имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{pq} \in \vec{U} + \vec{W}$. Если $U \cap W \neq \emptyset$, то $U \cap W = r + (\vec{U} \cap \vec{W})$, где $r \in U \cap W$.

$\Downarrow$ Пусть $U \cap W \neq \emptyset$ и $r \in U \cap W$. Тогда $r = p + \vec{x}$ и $r = q + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Следовательно, $p + \vec{x} = q + \vec{y} = p + \overrightarrow{pq} + \vec{y}$, откуда $\vec{x} = \overrightarrow{pq} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{pq} = \vec{y} - \vec{x}$. Таким образом, $\overrightarrow{pq} \in \vec{U} + \vec{W}$. Далее, по утверждению 1 предложения сл.9 имеем $U = r + \vec{U}$ и $W = r + \vec{W}$. Ясно, что $r + (\vec{U} \cap \vec{W}) \subseteq U \cap W$. Покажем, что $U \cap W \subseteq r + (\vec{U} \cap \vec{W})$. Пусть $s \in U \cap W$. Тогда $s = r + \vec{x}$ и $s = r + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Так как $\vec{x} = \vec{y}$, заключаем, что $\vec{x} \in \vec{U} \cap \vec{W}$ и $s \in U \cap W$.
Предположим, что $\overrightarrow{pq} \in \vec{U} + \vec{W}$. Тогда $\overrightarrow{pq} = \vec{x} + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Покажем, что $p + \vec{x} = q - \vec{y}$. Имеем
$q - \vec{y} = (p + \overrightarrow{pq}) - \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y} - \vec{y}) = p + \vec{x}$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Пусть U и W – плоскости в аффинном пространстве $V = (V, \vec{V}, +)$. Тогда $U \cup W \subseteq V$. Так как $V = p + \vec{V}$ для любой точки $p \in V$, V является плоскостью. Обозначим через $\langle\langle U, W \rangle\rangle$ пересечение всех плоскостей, включающих $U \cup W$. Согласно следствию сл.11 $\langle\langle U, W \rangle\rangle$ является плоскостью.

Определение

Композитом плоскостей U и W называется плоскость $\langle\langle U, W \rangle\rangle$.

Композитом двух различных точек p, q в любом аффинном пространстве является прямая (p, q).
В геометрическом пространстве (см. сл.4) композитом двух параллельных или пересекающихся прямых будет проходящая через эти прямые плоскость, а композитом двух скрещивающихся прямых – все пространство.

Строение композита выяснено в следующем утверждении.

Теорема

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$ – плоскости в аффинном пространстве $V = (V, \vec{V}, +)$. Тогда $\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle = p + (\vec{U} + \vec{W} + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$.

$\Downarrow$ Положим $Z = p + \vec{Z}$, где $\vec{Z} = \vec{U} + \vec{W} + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$. Так как $\vec{U} \subseteq \vec{Z}$, ясно, что $U \subseteq Z$. Поскольку $\vec{W} \subseteq \vec{Z}$ и $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq} \in \vec{Z}$, в силу утверждения 2 предложения сл.9 $W \subseteq Z$. Таким образом, $\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle \subseteq Z$.
Пусть $P = r + \vec{P}$ – произвольная плоскость, включающая плоскости U и W. Покажем, что $Z \subseteq P$. Этим будет доказано, что $Z \subseteq \langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle$ и теорема будет доказана. Так как $p \in U$, имеем $p \in P$ и потому $P = p + \vec{P}$. В силу утверждения 2 предложения сл.9 из $U \subseteq P$ следует $\vec{U} \subseteq \vec{P}$, а из $W \subseteq P$ — $\vec{W} \subseteq \vec{P}$ и $\overrightarrow{pq} \in \vec{P}$. Следовательно, $\vec{U} + \vec{W} + \langle \overrightarrow{pq} \rangle \subseteq \vec{P}$ и $Z \subseteq P$.$\Uparrow$

Из доказанной теоремы и теоремы сл.12 с учетом теоремы сл.13 т.2-4 вытекает

Следствие

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$. Тогда если $U \cap W \neq \emptyset$, то $\dim\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ и если $U \cap W = \emptyset$, то $\dim\langle\!\langle U, W \rangle\!\rangle = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) + 1$.

Взаимное расположение двух плоскостей

Пусть $U = p + \vec{U}$ и $W = q + \vec{W}$ – плоскости в аффинном пространстве $V = (V, \vec{V}, +)$. Предположим, что $\dim U \leq \dim W$; это предположение не ограничивает общности. *Взаимное расположение плоскостей* U и W характеризуется двумя параметрами: логическим ($U \cap W = \emptyset$ – да или нет) и целочисленным – размерностью $\dim(\vec{U} \cap \vec{W})$. При условии $\dim V \geq \dim U + \dim W + 1$ возможны $2(\dim U + 1)$ способов взаимного расположения плоскостей U и W. Минимальная размерность пространства V, в котором возможно взамное расположение плоскостей U и W с заданным значением $\dim(\vec{U} \cap \vec{W})$, определяется из неравенства $\dim V \geq \dim\langle\langle U, W\rangle\rangle$ с помощью следствия сл.14.

Все 4 способа взаимного расположения двух прямых реализуются в 3-мерном пространстве (и изучены в аналитической геометрии).

Прямая и плоскость размерности 2 также могут располагаться 4-мя способами, из которых в 3-мерном пространстве реализуется только 3 (прямая и плоскость размерности 2 могут скрещиваться в пространстве размерности не меньше 4).

Две плоскости размерности 2 могут располагаться 6-ю способами, из которых в 3-мерном пространстве реализуется только 3.

Плоскости U и W называются *параллельными*, если $U \cap W = \emptyset$ и $\dim(\vec{U} \cap \vec{W}) = \dim \vec{U}$ (последнее условие равносильно включению $\vec{U} \subseteq \vec{W}$).

Плоскости U и W называются *скрещивающимися*, если $U \cap W = \emptyset$ и $\dim(\vec{U} \cap \vec{W}) = 0$.

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F. Зафиксируем в нем репер $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Зафиксируем также набор функций $g_j : F^n \longrightarrow F$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Определение

Геометрическим образом системы уравнений $g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(j = 1, \ldots, k)$ относительно репера $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называется множество всех точек p, строки координат которых в данном репере являются решениями этой системы уравнений. Будем говорить также, что система уравнений определяет свой геометрический образ, и что геометрический образ задается системой уравнений.

Теорема

Совместная система линейных уравнений от n неизвестных над полем F с основной матрицей A ранга r определяет в пространстве V плоскость размерности $n - r$. Обратно, любая плоскость размерности d задается системой из $n - d$ линейных уравнений от n неизвестных над полем F.

$\Downarrow$ Пусть $A \cdot x = b$ – совместная система линейных уравнений от n неизвестных над полем F, где $A \in F^{k \times n}$, $b \in F_k$. Положим $U = \{p \in V | A \cdot [p] = b\}$ и $\vec{U} = \{\vec{x} \in \vec{V} | A \cdot [\vec{x}] = O\}$. Тогда для $p, q \in U$ согласно предложению сл.6 имеем $[\overrightarrow{pq}] = [q] - [p]$, откуда $A \cdot [\overrightarrow{pq}] = A \cdot ([q] - [p]) = A \cdot [q] - A \cdot [p] = b - b = O$, т.е. $\overrightarrow{pq} \in \vec{U}$. Зафиксируем точку $p_0 \in U$. Тогда ясно, что $U = p_0 + \vec{U}$. Так как подпространство $\vec{U}$ изоморфно пространству решений однородной системы линейных уравнений $A \cdot x = O$, с помощью теоремы сл.8 т.2-6 заключаем, что $\dim U = n - r$.
Обратно, пусть $U = p + \vec{U}$ и $\dim U = d$. Выберем в $\vec{U}$ базис $(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_d)$. С помощью теоремы сл.15 т.2-6 построим однородную систему $A \cdot x = O$ линейных уравнений (из $n - d$ уравнений), задающую линейную оболочку системы строк $[\vec{a}_1]^\top, \ldots, [\vec{a}_d]^\top$. Положим $b = A \cdot [p]$. Тогда геометрический образ системы линейных уравнений $A \cdot x = b$ совпадает с U. Теорема доказана. $\Uparrow$

Определения

В случае задания плоскости системой линейных уравнений эти уравнения называются *координатными уравнениями* данной плоскости.
Плоскость, заданная одним координатным уравнением, имеющим по крайней мере один ненулевой коэффициент, называется *гиперплоскостью*.

Гиперплоскость в n-мерном аффинном пространстве является плоскостью размерности $n-1$. В 2-мерном геометрическом пространстве (на обычной плоскости в 3-мерном геометрическом пространстве) гиперплоскостями будут прямые, а в 3-мерном геометрическом пространстве – обычные плоскости.
В силу теоремы сл.16 каждая плоскость является пересечением конечного семейства гиперплоскостей (каждое уравнение системы определяет гиперплоскость).

Зафиксируем аффинное пространство $V = (V, \vec{V}, +)$ над полем F и в нем репер $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Рассмотрим отличную от точки плоскость U, заданную векторным уравнением (см. сл.8) $x = p + \xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_d\vec{a}_d$. Отсюда следует равенство $[x] = [p] + \xi_1[\vec{a}_1] + \ldots + \xi_d[\vec{a}_d]$. Положим $[\vec{a}_j] = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})^\top$, $[p] = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top$, $[x] = (x_1, \ldots, x_n)^\top$. Получаем систему равенств

Параметрические уравнения плоскости

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}\xi_1 + \ldots + \alpha_{1d}\xi_d, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}\xi_1 + \ldots + \alpha_{2d}\xi_d, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}\xi_1 + \ldots + \alpha_{nd}\xi_d. \end{cases}$$

Эти равенства естественно назвать *параметрическими уравнениями* плоскости U. Здесь β_j и α_{ij} – фиксированные скаляры, причем $d = \mathrm{r}((\alpha_{ij})_{n\times d})$, а $\xi_1, \ldots, \xi_d$ – независимые параметры, пробегающие поле F. Параметрические уравнения получаются из координатных путем решения системы линейных уравнений и записи общего решения в виде системы линейных уравнений (см. сл.7 т.2-6).

Наиболее важны параметрические уравнения прямой в аффинном пространстве F^n, проходящей через точку $p(p_1, \ldots, p_n)$ с направляющим вектором $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) \neq \vec{0}$. Они дают выражения для координат произвольной точки $q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на этой прямой.

Параметрические уравнения прямой в аффинном пространстве

$x_j = p_j + b_j t$ ($j = 1, \ldots, n$, $b_j \neq 0$ при некотором j); $t \in F$.

Используются также *канонические уравнения* указанной прямой.

Канонические уравнения прямой в аффинном пространстве

$$\frac{x_1 - p_1}{b_1} = \frac{x_2 - p_2}{b_2} = \ldots = \frac{x_n - p_2}{b_n}.$$

Определение

Аффинное пространство $V = (V, \vec{V}, +)$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если $\vec{V}$ – евклидово пространство.

Тогда V превращается в метрическое пространство путем определения расстояния между точками $p, q \in V$: $\rho(p, q) = |\overrightarrow{pq}|$. Проверим аксиомы метрического пространства. Ясно, что $\rho(p, q) \geq 0$, $\rho(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$, $\rho(p, q) = \rho(q, p)$. Так как $|\overrightarrow{pr}| = |\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}| \leq |\overrightarrow{pq}| + |\overrightarrow{qr}|$, заключаем, что $\rho(p, r) \leq \rho(p, q) + \rho(q, r)$.

Примеры: геометрические пространства на плоскости или в пространстве; аффинные арифметические пространства $(\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +)$ над полем $\mathbb{R}$ при $n = 2, 3, \ldots$.

Пусть U – плоскость в аффинном евклидовом пространстве $(V, \vec{V}, +)$ и $p \in V$.

Определение

Расстоянием от точки p до плоскости U называется $\inf\{\rho(p,r) | r \in U\}$.
Обозначение: $\rho(p,U)$.

Предложение

Пусть $U = q + \vec{U}$ – плоскость, $p \in V$. Тогда $\rho(p,U) = |\vec{z}|$, где $\vec{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{pq}$ относительно $\vec{U}$.

$\Downarrow$ Запишем $\overrightarrow{pq} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$, $\vec{z} \in \vec{U}^{\perp}$. Возьмем $r \in U$, тогда $r = q + \vec{x}$ для некоторого $\vec{x} \in \vec{U}$. Так как $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \vec{y} + \vec{z} + \vec{x} = \vec{z} + \vec{u}$, где $\vec{u} = \vec{y} + \vec{x} \in \vec{U}$, имеем $\rho(p,r) = |\overrightarrow{pr}| = |\vec{z} + \vec{u}|$. Далее, $|\vec{z} + \vec{u}|^2 = (\vec{z} + \vec{u})^2 = \vec{z}^2 + \vec{u}^2 = |\vec{z}|^2 + |\vec{u}|^2$, поскольку $\vec{z} \perp \vec{u}$. Таким образом, $\rho(p,r) = \sqrt{|\vec{z}|^2 + |\vec{u}|^2} \geq |\vec{z}|$ и $\rho(p,r) = |\vec{z}|$ при $\vec{u} = \vec{0}$, т.е. при таком выборе точки r, что $\overrightarrow{qr} = -\vec{y}$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Определение

Расстоянием между плоскостями U и W евклидова аффинного пространства называется число $\inf\{\rho(p,r) | p \in U, r \in W\}$. Обозначение: $\rho(U,W)$.

Предложение

Пусть $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$ – плоскости. Тогда $\rho(U,W) = |\vec{z}|$, где $\vec{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{pq}$ относительно подпространства $\vec{U} + \vec{W}$.

$\Downarrow$ Пусть $r \in U$, $s \in W$, т.е. $r = p + \vec{x}$, $s = q + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Тогда $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rs}$ и $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs}$, откуда $\vec{x} + \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{pq} + \vec{y}$. Следовательно, $\overrightarrow{rs} = \overrightarrow{pq} - \vec{x} + \vec{y}$. Запишем $\overrightarrow{pq} = \vec{u} + \vec{z}$, где $\vec{u} \in \vec{U} + \vec{W}$, $\vec{z} \in (\vec{U} + \vec{W})^{\perp}$. Тогда $\overrightarrow{rs} = \vec{u} + \vec{z} - \vec{x} + \vec{y} = \vec{v} + \vec{z}$, где $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x} + \vec{y} \in \vec{U} + \vec{W}$. Имеем $|\overrightarrow{rs}|^2 = \overrightarrow{rs}^2 = (\vec{v} + \vec{z})^2 = \vec{v}^2 + \vec{z}^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{z}|^2$, поскольку $\vec{v} \perp \vec{z}$. Значит, $\rho(r,s) = |\overrightarrow{rs}| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{z}|^2} \geq |\vec{z}|$. Выбрав точки r, s так, чтобы $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, получим $\rho(r,s) = |\vec{z}|$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство, $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – репер в нем и базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – ортонормированный. Рассмотрим гиперплоскость U, заданную в этом репере уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$. Вектор $\vec{n}$ с координатами $[\vec{n}] = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^\top$ называется *нормальным вектором* гиперплоскости U. Если записать $U = p + \vec{U}$, то $\vec{U}$ состоит из всех векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Следовательно, $\vec{n} \in \vec{U}^\perp$ и $\vec{U}^\perp = \langle \vec{n} \rangle$.

Предложение

Расстояние от точки $q(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ до гиперплоскости U, заданной уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$, может быть вычислено по формуле $\rho(q, U) = \dfrac{|\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_n\gamma_n - \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}}$.

$\Downarrow$ Пусть $p \in U$ и $[p] = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^\top$. Тогда $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \beta$. Пусть $\vec{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{pq}$ относительно $\vec{U}$. Тогда $\vec{z} = \delta\vec{n}$. Запишем $\overrightarrow{pq} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$. Умножим это равенство скалярно на вектор $\vec{n}$: $(\overrightarrow{pq}, \vec{n}) = (\vec{y}, \vec{n}) + (\vec{z}, \vec{n}) = \delta\vec{n}^2$. Отсюда $\delta = \dfrac{(\overrightarrow{pq}, \vec{n})}{\vec{n}^2}$ и $|\vec{z}| = |\delta||\vec{n}| = \dfrac{|(\overrightarrow{pq}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}$. Так как $[\overrightarrow{pq}] = (\gamma_1 - \beta_1, \ldots, \gamma_n - \beta_n)^\top$, имеем $(\overrightarrow{pq}, \vec{n}) = \alpha_1(\gamma_1 - \beta_1) + \ldots + \alpha_n(\gamma_n - \beta_n) = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n - (\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n) = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n - \beta$, откуда следует требуемое. $\Uparrow$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство, $n = \dim V$.

Определения и обозначения

Параллелотопом в аффинном евклидовом пространстве V с вершиной $p \in V$, порожденным линейно независимой системой $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ векторов из $\vec{V}$ $(k \leq n)$ называется множество точек

$$\{q \in V | q - p = \lambda_1 \vec{b}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{b}_k, 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, \ldots, k\}.$$

Обозначение: $ParTop(p; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$.
Вершинами параллелотопа $ParTop(p; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ называются точки $p + \lambda_1 \vec{b}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{b}_k$, где $\lambda_j \in \{0, 1\}$ при $j = 1, \ldots, k$.
Количество вершин параллелотопа $ParTop(p; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ равно 2^k.

Формула для объема этого параллелотопа получается из формулы для объема параллелотопа в евклидовом пространстве (см. сл.8 и 9 т.2-16).

Пусть $(V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F.

Определение

Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ называется пара отображений $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$, где $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$, $\vec{\mathcal{A}} \in \mathrm{H}(\vec{V}, \vec{V})$ и для любых $p \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$ имеет место равенство $\mathcal{A}(p + \vec{x}) = \mathcal{A}p + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$.

Обозначать аффинное преобразование $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$ будем обозначать просто через $\mathcal{A}$.

Последнее условие из определения аффинного преобразования равносильно тому, что для любых точек $p, q \in V$ имеет место равенство $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\mathcal{A}p\mathcal{A}q}$.

Примеры аффинных преобразований

1. Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ является *сдвиг* на вектор $\vec{a} \in \vec{V}$, определяемый следующим образом: $\mathcal{T}_{\vec{a}}(p) = p + \vec{a}$, $\vec{\mathcal{T}}_{\vec{a}} = \mathcal{E}$.
2. Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ является *центроаффинное преобразование*, определяемое так: $\vec{\mathcal{A}} \in \mathrm{H}(\vec{V})$ – произвольный линейный оператор, $c \in V$ – фиксированная точка (центр), $\mathcal{A}p = c + \vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{cp})$ для любой точки $p \in V$.

Предложение

Прозведение двух аффинных преобразований аффинного пространства V является аффинным преобразованием.

$\Downarrow$Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – аффинные преобразования аффинного пространства V, $p \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$. Тогда $\mathcal{B}(\mathcal{A}(p + \vec{x})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}p + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}p) + \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{A}}\vec{x}) = (\mathcal{B}\mathcal{A})p + (\vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{A}})\vec{x}$, т.е. $\mathcal{B}\mathcal{A}$ – аффинное преобразование.$\Uparrow$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F размерности n.

Определение

Назовем точки $p_1, \ldots, p_{n+1} \in V$ *точками общего положения*, если система векторов $(p_2 - p_1, \ldots, p_{n+1} - p_1)$ линейно независима.

Теорема

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F размерности n и $p_1, \ldots, p_{n+1} \in V$ — прозвольные точки общего положения. Тогда для любых точек $q_1, \ldots, q_{n+1} \in V$ существует единственное аффинное преобразование $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$, для которого $\mathcal{A}p_i = q_i$ при всех $i = 1, \ldots, n+1$.

$\Downarrow$ Положим $\vec{e_i} = p_{i+1} - p_1$ и $\vec{f_i} = q_{i+1} - q_1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $(p_1; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – репер в пространстве V. Пусть $x \in V$ и $[x] = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Положим $\mathcal{A}x = y$, где $y = q_1 + \xi_1\vec{f_1} + \ldots + \xi_n\vec{f_n}$. Очевидно, что $\mathcal{A}p_i = q_i$ при всех $i = 1, \ldots, n+1$.
Линейный оператор $\vec{\mathcal{A}} : \vec{V} \longrightarrow \vec{V}$ определяется условиями $\vec{\mathcal{A}}\vec{e_i} = \vec{f_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Его существование и единственность обеспечиваются теоремой сл.7 т.2-7.
Проверим равенство $\mathcal{A}(r + \vec{x}) = \mathcal{A}r + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ для любых $r \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$. Пусть $r = p_1 + \rho_1\vec{e}_1 + \ldots \rho_n\vec{e}_n$, $\vec{x} = \xi_1\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{e}_n$. Тогда $r + \vec{x} = q_1 + (\rho_1 + \xi_1)\vec{e}_1 + \ldots (\rho_n + \xi_n)\vec{e}_n$ и $\mathcal{A}(r + \vec{x}) = q_1 + (\rho_1 + \xi_1)\vec{f_1} + \ldots (\rho_n + \xi_n)\vec{f_n}$, $\mathcal{A}(r) = q_1 + \rho_1\vec{f_1} + \ldots \rho_n\vec{f_n}$, $\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = \vec{\mathcal{A}}(\xi_1\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{e}_n) = \xi_1\vec{\mathcal{A}}\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{\mathcal{A}}\vec{e}_n = \xi_1\vec{f_1} + \ldots + \xi_n\vec{f_n}$ Таким образом, $\mathcal{A}(r + \vec{x}) = \mathcal{A}r + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$, и $\mathcal{A}$ является аффинным преобразованием.

Докажем его единственность. Пусть $\mathcal{B} : V \longrightarrow V$ — произвольное аффинное преобразование, для которого $\mathcal{B}p_i = q_i$ при всех $i = 1, \ldots, n+1$. Тогда $\vec{\mathcal{B}}(p_{i+1} - p_1) = q_{i+1} - q_1$ и $\vec{\mathcal{B}}\vec{e_i} = \vec{f_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Таким образом, $\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{B}}$. Учитывая, что $\mathcal{B}p_1 = q_1 = \mathcal{A}p_1$, заключаем, что $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
Теорема доказана.$\Uparrow$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем Fразмерности n и $(o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ – фиксированный репер в нем. Зафиксируем аффинное преобразование $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$ этого пространства. Тогда для любой точки $p \in V$, так как $p = o + \overrightarrow{op}$, справедливо равенство

$$\mathcal{A}p = \mathcal{A}o + \vec{\mathcal{A}}\overrightarrow{op}. \tag{1}$$

Обозначим через $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ матрицу линейного оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Тогда $[\vec{\mathcal{A}}\overrightarrow{op}] = A \cdot [\overrightarrow{op}]$. Из равенства (1) получаем

$$[\mathcal{A}p] = [\mathcal{A}o] + A \cdot [\overrightarrow{op}]. \tag{2}$$

Запишем координаты точек $\mathcal{A}o$, $\mathcal{A}p$ и p в репере $(o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$: $[\mathcal{A}o] = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$, $[\mathcal{A}p] = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^\top$ и $[p] = [\overrightarrow{op}] = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$. Расписывая равенство (2) по координатам , получаем

Формулы для координат образа точки при аффинном преобразовании

$$\begin{cases} \eta_1 = \gamma_1 + \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n; \\ \eta_2 = \gamma_2 + \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = \gamma_n + \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n. \end{cases}$$

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство и $\dim V = n$. Определение расстояния между точками аффинного евклидова пространства см. на сл.21.

Определение

Отображение $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ называется *изометрией*, если $\rho(p, q) = \rho(\mathcal{A}p, \mathcal{A}q)$ для любых $p, q \in V$.

Примеры изометрий

1. Изометрией является сдвиг на вектор $\vec{a} \in \vec{V}$ (см. сл.26).
2. Изометрией является центроаффинное преобразование, у которого линейный оператор является ортогональным. Такое преобразование называется *ортогональным* с центром c.

Предложение

Произведение изометрий является изометрией.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – изометрии. Тогда для любых $p, q \in V$ имеем $\rho(\mathcal{B}(\mathcal{A}p), \mathcal{B}(\mathcal{A}q)) = \rho(\mathcal{A}p, \mathcal{A}q) = \rho(p, q)$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Теорема

Любая изометрия есть аффинное преобразование и является произведением сдвига и ортогонального преобразования.

$\Downarrow$Пусть $\mathcal{A}$ – изометрия. Предположим, что $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку c и докажем, что $\mathcal{A}$ – ортогональное преобразование с центром c. Для $x \in \vec{V}$ положим $\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = \overrightarrow{c\mathcal{A}(c+\vec{x})}$. Тогда $\mathcal{A}(c+\vec{x}) = c + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$. Докажем, что $\vec{\mathcal{A}}$ – ортогональный линейный оператор. Поскольку $\mathcal{A}c = c$, имеем $\vec{\mathcal{A}}\vec{0} = \vec{0}$. Из определения $\vec{\mathcal{A}}$, так как $\mathcal{A}$ – изометрия, получаем $|\vec{\mathcal{A}}\vec{y} - \vec{\mathcal{A}}\vec{x}| = |\mathcal{A}(c+\vec{y}) - \mathcal{A}(c+\vec{x})| = \rho(\mathcal{A}(c+\vec{x}), \mathcal{A}(c+\vec{y})) = \rho(c+\vec{x}, c+\vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}|$. Следовательно, $|\vec{\mathcal{A}}\vec{y} - \vec{\mathcal{A}}\vec{x}| = |\vec{y} - \vec{x}|$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$. Согласно теореме сл.31 т.2-18 отображение $\vec{\mathcal{A}}$ – ортогональный линейный оператор и $\mathcal{A}$ – аффинное преобразование.

Предположим, что $\mathcal{A}$ не имеет неподвижных точек. Зафиксируем $c \in V$ и положим $\vec{a} = \overrightarrow{\mathcal{A}(c)c}$. Возьмем сдвиг $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ и положим $\mathcal{B} = \mathcal{T}_{\vec{a}}\mathcal{A}$. Согласно предложению сл.30 $\mathcal{B}$ – изометрия. Она имеет неподвижную точку c: $\mathcal{B}c = \mathcal{T}_{\vec{a}}(\mathcal{A}c) = \mathcal{A}c + \overrightarrow{\mathcal{A}(c)c} = c$. Согласно доказанному в предыдущем абзаце $\mathcal{B}$ – ортогональное преобразование с центром c. Поскольку $\mathcal{B} = \mathcal{T}_{\vec{a}}\mathcal{A}$, имеем $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1}\mathcal{B}$. Так как $\mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\vec{a}}$, получаем $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{-\vec{a}}\mathcal{B}$. Согласно предложению сл.26 $\mathcal{A}$ является аффинным преобразованием.$\Uparrow$

Напомним, что согласно теореме сл.29 т.2-18 определитель любой матрицы ортогонального оператора равен 1 или -1.

Определения

Будем говорить, что изометрия $\mathcal{A}$ аффинного евклидова пространства *сохраняет ориентацию*, если определитель любой матрицы ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ равен 1. Такая изометрия называется также *движением* или *движением первого рода*.

Очевидно следующее

Наблюдение

Следующие условия для изометрии $\mathcal{A}$ эквивалентны:

1. $\mathcal{A}$ – движение;
2. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ сохраняет ориентацию некоторого базиса пространства $\vec{V}$;
3. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ сохраняет ориентацию любого базиса пространства $\vec{V}$.

Определения

Будем говорить, что изометрия $\mathcal{A}$ аффинного евклидова пространства *изменяет ориентацию*, если определитель любой матрицы ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ равен -1. Такая изометрия называется также *симметрией* или *движением второго рода*.

Очевидно следующее

Наблюдение

Следующие условия для изометрии $\mathcal{A}$ эквивалентны:

1. $\mathcal{A}$ – симметрия;
2. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ изменяет ориентацию некоторого базиса пространства $\vec{V}$;
3. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ изменяет ориентацию любого базиса пространства $\vec{V}$.

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F, $\mathrm{char}(F) \neq 2$ и $\dim V = n$. Пусть $A \in F^{n \times n}$ – ненулевая симметрическая матрица, $b \in F^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ – столбец из неизвестных. Рассмотрим уравнение

$$x^\top \cdot A \cdot x + b \cdot x + \gamma = 0, \qquad (3)$$

где $\gamma \in F$. Это *алгебраическое уравнение 2-й степени* с n неизвестными.

Определение

Квадрикой в аффинном пространстве V называется геометрический образ алгебраического уравнения 2-й степени с n неизвестными относительно некоторого репера $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Теорема

При изменении репера уравнение квадрики, заданной исходным уравнением (3) остается алгебраическим уравнением 2-й степени с n неизвестными.
За счет изменения репера уравнение (3) может быть приведено к одному из следующих видов ($r = \mathrm{r}(A)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_{r+1} \in F \setminus \{0\}$, $\delta \in F$):

1. $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + \delta = 0$,
2. $\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + \mu_{r+1} y_{r+1} = 0$.

$\Downarrow$ Заметим, что в уравнении (3) $x^\top \cdot A \cdot x$ – квадратичная форма от переменных $x_1, \ldots, x_n$, $b \cdot x$ – линейная форма от тех же переменных. При переходе от исходного репера $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ к другому реперу $(o'; \vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$ координаты точки p связаны формулой $[p] = [o'] + T \cdot [p]'$ (сл.7), где T – матрица перехода от базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ к базису $(\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n')$. Полагая $c = [o']$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$, для преобразования уравнения получаем формулу $x = c + T \cdot y$. Имеем $(c + T \cdot y)^\top \cdot A \cdot (c + T \cdot y) + b \cdot (c + T \cdot y) + \gamma = 0$. Преобразуем левую часть: $(c^\top + (T \cdot y)^\top) \cdot (A \cdot c + A \cdot T \cdot y) + b \cdot c + b \cdot T \cdot y + \gamma =$ $c^\top \cdot A \cdot c + c^\top \cdot A \cdot T \cdot y + y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot T \cdot y + y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot c + b \cdot c + b \cdot T \cdot y + \gamma =$ $y^\top \cdot (T^\top \cdot A \cdot T) \cdot y + (c^\top \cdot A + b) \cdot T \cdot y + y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot c + c^\top \cdot A \cdot c + b \cdot c + \gamma$. Так как матрица $y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot c$ – квадратная порядка 1, имеем $y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot c = (y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot c)^\top = c^\top \cdot A^\top \cdot T \cdot y$, и преобразованное уравнение приобретает окончательный вид

$$y^\top \cdot (T^\top \cdot A \cdot T) \cdot y + (c^\top \cdot (A + A^\top) + b) \cdot T \cdot y + c^\top \cdot A \cdot c + b \cdot c + \gamma = 0. \quad (4)$$

Так как T – невырожденная матрица, $\mathrm{r}(T^\top \cdot A \cdot T) = \mathrm{r}(A)$. В частности, $T^\top \cdot A \cdot T \neq O$ и полученное уравнение является алгебраическим уравнением 2-й степени с n неизвестными, так как $(c^\top \cdot (A + A^\top) + b) \cdot T \in F^n$ и $c^\top \cdot A \cdot c + b \cdot c + \gamma \in F$. Первое утверждение теоремы доказано.

Это утверждение обобщает на случай произвольного аффинного пространства утверждения сл.2 т.1-19 и сл.3 т.1-20.

Окончание доказательства

Заменим исходный репер $(o;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ репером $(o;\vec{e}_1',\ldots,\vec{e}_n')$ с тем же началом и матрицей перехода T, для которой замена переменных $x = T\cdot y$ приводит квадратичную форму $x^\top\cdot A\cdot x$ к каноническому виду (сл.14 т.2-19). Тогда, так как $r = \mathrm{r}(A)$, уравнение (4) примет вид $\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_r y_r^2+\mu_1 y_1+\ldots+\mu_n y_n+\nu = 0$ Выделяя полные квадраты и перенося начало координат в точку $o'(-\frac{\mu_1}{2\lambda_1},\ldots,-\frac{\mu_r}{2\lambda_r},0,\ldots,0)$ (нули возникают при $r<n$), получаем при $r=n$ уравнение $\lambda_1 z_1^2+\ldots+\lambda_n z_n^2+\delta = 0$, а при $r<n$ – $\lambda_1 z_1^2+\ldots+\lambda_r z_r^2+\mu_{r+1}z_{r+1}+\ldots+\mu_n z_n+\kappa = 0$. Если во втором случае $\mu_j = 0$ при $j = r+1,\ldots,n$, то утверждение доказано. Если $\mu_j\neq 0$ при некотором $j = r+1,\ldots,n$, то зафиксируем такой индекс и сделаем замену $u_k = z_k$ при $k\neq j$, $u_j = z_j+\sum_{r+1\leq\ell\leq n,\ell\neq j}\frac{\mu_\ell}{\mu_j}z_\ell$. Уравнение примет вид $\lambda_1 u_1^2+\ldots+\lambda_r u_r^2+\mu_j u_j+\kappa = 0$ Поменяв местами в базисе $(\vec{e}_1',\ldots,\vec{e}_n')$ векторы e_j' и e_{r+1}', если $j\neq r+1$, и сделав параллельный перенос, чтобы избавиться от κ, если $\kappa\neq 0$, получим требуемое. Теорема доказана.$\Uparrow$

Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве $\mathbb{R}^5$, если в стандартном репере $A(1,-2,3,1,5)$, $B(2,0,6,5,10)$, $C(-1,1,4,6,1)$.
Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A.
Найти площадь $\triangle ABC$.

Находим $\overrightarrow{AB}=(1,2,3,4,5)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,3,1,5,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,1,-2,1,-9)$.
Далее, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{55}$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=7$, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=48$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=48$. Вычисляем $\cos A=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{7}{55}$ и аналогично $\cos B=\cos C=\dfrac{12}{\sqrt{330}}$.

Чтобы найти канонические уравнения высоты, найдем ее основание – точку D. Имеем $D = B + \lambda\overrightarrow{BC}$ и $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Так как $\overrightarrow{AD} = (1-3\lambda, 2+\lambda, 3-2\lambda, 4+\lambda, 5-9\lambda)$, имеем $-3(1-3\lambda) + 2 + \lambda - 2(3-2\lambda) + 4 + \lambda - 9(5-9\lambda) = 0$, откуда $\lambda = \frac{1}{2}$ и $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5, \frac{11}{2}, \frac{11}{2})$. Значит, $\overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 2, \frac{9}{2}, \frac{1}{2})$ и в качестве направляющего вектора прямой-высоты можно взять вектор $\vec{a} = 2\overrightarrow{AD} = (-1, 5, 4, 9, 1)$. Канонические уравнения высоты:

$$\frac{x_1-1}{-1} = \frac{x_2+2}{5} = \frac{x_3-3}{4} = \frac{x_4-1}{9} = \frac{x_5-5}{1}.$$

Чтобы найти площадь $\triangle ABC$, заметим, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}V_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$, а $V_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}} = \sqrt{g_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}}$ (см. предложение сл.8 т.2-16). Запишем определитель Грама $g_{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB}^2 & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) & \overrightarrow{AC}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 55 & 7 \\ 7 & 55 \end{vmatrix} = 2976 = 16 \times 186.$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}4\sqrt{186} = 2\sqrt{186}$.

Параллелотоп в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ построен на векторах $\vec{a}_1 = (2,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1,2,1)$, $\vec{a}_4 = (1,1,1,2)$, отложенных от точки $p_0(1,2,-1,0)$. Проверить, лежит ли точка $q(2,3,-2,-1)$ внутри или вне этого параллелотопа.
Найти длину высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора $\vec{a}_4$ на грань $(p;\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$.

Параллелотоп состоит из всех точек вида $p_0+\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3+\lambda_4\vec{a}_4$, где $0\le\lambda_i\le 1$ при $i=1,2,3,4$. Чтобы определить, принадлежит ли точка q параллелотопу, нужно разложить вектор $q-p_0=(1,1,-1,-1)$ по векторам $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&1&1&1\\ 1&2&1&1&1\\ 1&1&2&1&-1\\ 1&1&1&2&-1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 5&5&5&5&0\\ 1&2&1&1&1\\ 1&1&2&1&-1\\ 1&1&1&2&-1 \end{array}\right)\sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&1&-1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&-1\\ 0&0&0&1&-1 \end{array}\right)$$

Отсюда $q-p_0=\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3-\vec{a}_4$, т.е. $\lambda_3=\lambda_4=-1$. Таким образом, точка q лежит вне параллелотопа.

Длина высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора $\vec{a}_4$ на грань $(p; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, равна длине ортогональной составляющей $\vec{b}$ вектора $\vec{a}_4$ относительно подпространства $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$. Согласно следствию сл.10 т.2-16 $|\vec{b}| = \sqrt{\frac{g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)}}{g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}}}$. Вычисляем

$$g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)} = \begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & (\vec{a}_1, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & \vec{a}_2^2 & (\vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ (\vec{a}_3, \vec{a}_1) & (\vec{a}_3, \vec{a}_2) & \vec{a}_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 19 & 19 & 19 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 19 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 19.$$

Таким образом, длина высоты равна $\sqrt{\frac{5}{19}}$.

Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ точку B, симметричную точке $A(-3,-1,-2,9)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(-1,1,0,1)$, $\vec{a}_1 = (2,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1,2,1)$. Найти расстояние от точки $D(1,1,1,1)$ до этой гиперплоскости.

Найдем нормальный вектор $\vec{n}$ гиперплоскости. Имеем $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ — обобщенное векторное произведение. Вычисляем:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \vec{e}_1 \\ 1 & 2 & 1 & \vec{e}_2 \\ 1 & 1 & 2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 & \vec{e}_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_1 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_2 - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{e}_4 = (-1,-1,-1,4).$$

Записываем координатное уравнение гиперплоскости: $(\vec{n}, x - p_0) = 0$ или $-(x_1 + 1) - (x_2 - 1) - x_3 + 4(x_4 - 1) = 0$; $x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 4 = 0$.
Записываем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к гиперплоскости: $x = A + t\vec{n}$ или $x_1 = -3 - t$, $x_2 = -1 - t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 9 + 4t$.
Ищем точку C пересечения прямой и гиперплоскости, решая совместно уравнения прямой и гиперплоскости:
$-3 - t - 1 - t - 2 - t - 4(9 + 4t) + 4 = 0$; $19t + 38 = 0$; $t = -2$. Точка $C(-1, 1, 0, 1)$. Так как $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CA} = (-2, -2, -2, 8)$, имеем $\overrightarrow{CB} = (2, 2, 2, -8)$ и получаем координаты точки $B(1, 3, 2, -7)$.

Расстояние от точки $D(1, 1, 1, 1)$ до гиперплоскости находим согласно формуле из предложения сл.24: $d = \dfrac{|1 + 1 + 1 - 4 + 4|}{\sqrt{1 + 1 + 1 + 16}} = \dfrac{3}{\sqrt{19}}$.

Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ пересечение двумерных плоскостей $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ и $x = q_0 + t_1\vec{a}_3 + t_2\vec{a}_4$, где $p_0(-1, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_1 = (2, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 1, 1)$, $q_0(2, 1, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_4 = (1, -1, 1, -1)$.

Применим теорему сл.12: попробуем разложить вектор $q_0 - p_0 = (3, 0, 2, 2)$ по векторам $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_4$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Таким образом, $q_0 - p_0 = \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$ и $p_0 + \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 = q_0 - 3\vec{a}_3 = r_0$. Следовательно, плоскости имеют общую точку $r_0 = (-1, -2, -2, 0)$. Наши вычисления показывают, что сумма подпространств $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$ и $\langle \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle$ прямая, поэтому их пересечение нулевое и плоскости имеют единственную общую точку r_0.

Пример 5

Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ точки пересечения сферы $|x-p|=6$, где $p(1,3,7,3)$ и прямой, проходящей через точки $A(1,5,3,7)$, $B(1,7,-1,11)$.

Запишем параметрические уравнения прямой (AB). Найдем вектор $B-A=(0,2,-4,4)$. Направляющий вектор прямой $\vec{a}=(0,1,-2,2)$. Ее параметрические уравнения $x_1=1$, $x_2=5+t$, $x_3=3-2t$, $x_4=7+2t$. Найдем t из условия $|x-p|=6$, т.е. $(x-p)^2=36$. Так как $x-p=(x_1-1,x_2-3,x_3-7,x_4-3)=(0,t+2,-4-2t,4+2t)=(t+2)(0,1,-2,2)$, имеем $(x-p)^2=(t+2)^2(1+4+4)=9(t+2)^2$ и $9(t+2)^2=36$. Таким образом, $(t+2)^2=4$ и $t+2=\pm 2$, $t_1=0$, $t_2=-4$. Точки пересечения сферы и прямой $C_1=A$, $C_2=A-4\vec{a}=(1,1,11,-1)$.

Аффинное преобразование $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^3$ переводит точки $A(1,2,3)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,1,3)$, $D(1,1,7)$ в точки $A'(1,4,4)$, $B'(1,6,6)$, $C'(-2,3,0)$, $D'(-4,9,8)$ соответственно. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2,-1,4)$ при этом отображении.

По определению аффинного преобразования (сл.25) $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A'D'}$. Обозначим матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ через Q. С помощью формулы для координат образа вектора при линейном операторе (сл.17 т.2-7) получаем матричное уравнение
$Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$. Решив это уравнение, имеем
$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь находим $p_0 = A' - \vec{\mathcal{A}}A$. Вычисляем
$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Точка $p_0(1,2,-1)$.

Окончание примера 6

Найдем образ точки $q(2,-1,4)$ при отображении $\mathcal{A}$. Вычисляем $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\mathcal{A}(q) = (-2, 9, 7)$.

Изометрия $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^2$, сохраняющая ориентацию, переводит точку $(5,0)$ в точку $(0,0)$, а точку $(0,5)$ в точку $(7,1)$. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти также неподвижную точку этой изометрии.

Поскольку изометрия сохраняет ориентацию, матрица ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, причем $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Пусть $p_0(\gamma, \delta)$. Получаем матричное уравнение $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \delta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда $\begin{cases} 5\alpha + \gamma = 0, \\ -5\beta + \gamma = 7, \\ 5\beta + \delta = 0, \\ 5\alpha + \delta = 1 \end{cases}$ Решая эту систему, находим $\alpha = -\frac{3}{5}$, $\beta = -\frac{4}{5}$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$.

Пусть $q(\lambda, \mu)$ – неподвижная точка данной изометрии. Тогда
$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.
Из этого матричного равенства получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda = 3 - \frac{3\lambda - 4\mu}{5}, \\ \mu = 4 - \frac{4\lambda + 3\mu}{5}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $\mu = \dfrac{5}{4}$.
Таким образом, $q(\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$ – неподвижная точка данной изометрии.