Тема 2-2: Линейная зависимость

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – линейное пространство над полем F.

Определение

Система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие скаляры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$, не все равные нулю, что $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$.

Примеры

1. Любая система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
2. Любая система векторов, содержащая два одинаковых вектора, линейно зависима.
3. Любая система из двух коллинеарных векторов линейно зависима.
4. Любая система из трех компланарных векторов линейно зависима.

$\Downarrow$Если $a_i = 0_V$, то положим $\gamma_i = 1$ и $\gamma_j = 0$ при $j \neq i$. Тогда $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$. Этим доказано утверждение 1.
Если $a_i = a_j$, то положим $\gamma_i = 1$, $\gamma_j = -1$ и $\gamma_m = 0$ при $m \neq i, j$. Тогда $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$. Этим доказано утверждение 2.
Утверждения 3 и 4 предлагается доказать самостоятельно.$\Uparrow$

Задача

Будет ли система векторов-строк $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 4, 5, 6)$, $a_3 = (4, 3, 2, 1)$ линейно зависима?

Чтобы определить это, рассмотрим равенство $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = O$ и выясним, возможно ли оно, когда не все коэффициенты равны 0.
Подставив вместо a_1, a_2, a_3 их значения, получим $\gamma_1(1, 2, 3, 4) + \gamma_2(3, 4, 5, 6) + \gamma_3(4, 3, 2, 1) = (0, 0, 0, 0)$. Отсюда выводим $(\gamma_1 + 3\gamma_2 + 4\gamma_3, 2\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3, 3\gamma_1 + 5\gamma_2 + 2\gamma_3, 4\gamma_1 + 6\gamma_2 + \gamma_3) = (0, 0, 0, 0)$.
Так как строки равны, получаем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \gamma_1 + 3\gamma_2 + 4\gamma_3 = 0; \\ 2\gamma_1 + 4\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0; \\ 3\gamma_1 + 5\gamma_2 + 2\gamma_3 = 0; \\ 4\gamma_1 + 6\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса-Жордана.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & -10 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\gamma_1 - \frac{7}{2}\gamma_3 = 0$, $\gamma_2 + \frac{5}{2}\gamma_3 = 0$, и $\gamma_1 = \frac{7}{2}\gamma_3$, $\gamma_2 = -\frac{5}{2}\gamma_3$. Пусть $\gamma_3 = 2$. Тогда $\gamma_1 = 7$, $\gamma_2 = -5$. Таким образом, $7a_1 - 5a_2 + 2a_3 = O$ и система a_1, a_2, a_3 линейно зависима.

Система векторов называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой.
Назовем линейную комбинацию системы векторов *нетривиальной*, если она имеет по крайней мере один ненулевой коэффициент. Тогда любая нетривиальная линейная комбинация линейно независимой системы отлична от нулевого вектора. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Характеризация линейно независимой системы

Система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда для любых скаляров $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$ из равенства $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$ следует $\gamma_j = 0$ для всех $j = 1, \ldots, k$.

Свойство 1

Если система векторов имеет линейно зависимую подсистему, то она сама линейно зависима.

$\Downarrow$Добавив к нетривиальной линейной комбинации подсистемы, равной нулевому вектору, остальные векторы системы с нулевыми коэффициентами, получим нетривиальную линейную комбинацию всей системы, равную нулевому вектору.$\Uparrow$

Из свойства 1 непосредственно вытекает

Свойство 1'

Любая подсистема линейно независимой системы векторов сама линейно независима.

Свойство 2

Система векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда в ней найдется вектор, который линейно выражается через остальные векторы этой системы.

$\Downarrow$ Пусть система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейно зависима и $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$, но $\gamma_j \neq 0$ для некоторого $1 \leq j \leq k$. Тогда $\gamma_j a_j = \sum_{i \neq j}(-\gamma_i) a_i$. Умножив обе части этого равенства на γ_j^{-1}, получим $a_j = \sum_{i \neq j}(-\gamma_j^{-1}\gamma_i) a_i$, т.е. $(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k) \vdash a_j$. Таким образом, через остальные векторы системы линейно выражается каждый ее вектор, который входит с ненулевым коэффициентом в линейную комбинацию этой системы, равную нулевому вектору.

Обратно, пусть $(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k) \vdash a_j$, т.е. $a_j = \sum_{i \neq j} \gamma_i a_i$. Тогда $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$, где $\gamma_j = -1$. $\Uparrow$

Из свойства 2 непосредственно получаем

Свойство 2'

Система векторов является линейно независимой тогда и только тогда, когда в ней ни один вектор линейно не выражается через остальные векторы этой системы.

Свойство 3

Если система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейно независима, а система $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b)$ линейно зависима, то $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$.

$\Downarrow$ Так как система $(a_1, a_2, \ldots, a_k, b)$ линейно зависима, имеем $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k + \delta b = 0_V$ – нетривиальная линейная комбинация. Тогда $\delta \neq 0$, поскольку в противном случае получаем нетривиальную линейную комбинацию $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = 0_V$ – противоречие с тем, что система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейно независима. Так как $\delta \neq 0$, имеем $b = (-\delta^{-1}\gamma_1)a_1 + \ldots + (-\delta^{-1}\gamma_k)a_k$, что и требуется доказать. $\Uparrow$

Из свойства 3 непосредственно получаем

Свойство 3'

Если система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейно независима и вектор a_{k+1} линейно не выражается через систему $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то система $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$ линейно независима.

Это свойство позволяет строить линейно независимые системы векторов путем последовательного добавления векторов.

Свойство 4

Если для систем векторов имеет место $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и $k < m$, то система $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно зависима.

$\Downarrow$ Найдем скаляры $\xi_j \in F$ такие, что $\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_m b_m = 0_V$ – нетривиальная линейная комбинация. Для этого запишем в матричном виде условие $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ (см. сл.9 т.2-1):
$(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma$, где $\Gamma = (\gamma_{ij})_{k \times m}$. Тогда
$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_m b_m = ((a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma) \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_m)^\top =$
$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot (\Gamma \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_m)^\top)$. Выберем $\xi_1, \ldots, \xi_m$ так, чтобы
$\Gamma \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_m)^\top = O$. Последнее равенство представляет собой матричную запись однородной системы из k линейных уравнений с m неизвестными. Так как $k < m$, эта система имеет ненулевое решение, которое и дает требуемые значения $\xi_1, \ldots, \xi_m$.$\Uparrow$

Из свойства 4 непосредственно получаем

Свойство 4'

Если для систем векторов имеет место $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и система $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно независима, то $k \geq m$.

Следствие свойства 4'

Если для линейно независимых систем векторов имеет место равенство $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$, то $k = m$.

$\Downarrow$ Из свойства 4 линейных оболочек (сл.13 т.2-1) получаем, что $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Первое из этих утверждений и линейная независимость системы $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ влекут за собой $k \geq m$, а второе и линейная независимость системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — $k \leq m$. Следовательно, $k = m$. $\Uparrow$

Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ – произвольная система векторов. Если она линейно независима, то ее линейная оболочка $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ не совпадает с линейной оболочкой никакой ее собственной подсистемы. Если же эта система линейно зависима, то в ней согласно свойству 2 (сл.6) найдется вектор, который линейно выражается через остальные векторы. Исключив это вектор из системы, мы получим новую систему, линейная оболочка которой равна (в силу свойства 5 оболочек (сл.13 т.2-1)) $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$. Если полученная новая система линейно зависима, то из нее также можно исключить вектор без изменения линейной оболочки. Продолжая это процесс, приходим к следующему утверждению.

Предложение

Для произвольной системы векторов $(a_1, a_2, \dots, a_k)$, содержащей ненулевой вектор, существует такая линейно независимая подсистема $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p})$ этой системы, что $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p} \rangle$.

Подсистема с указанным в предложении свойством называется *максимальной линейно независимой подсистемой* исходной системы. Очевидно, что при добавлении к максимальной линейно независимой подсистеме любого вектора из исходной системы получается линейно зависимая система. Это объясняет термин "максимальная".

Зафиксируем произвольную систему векторов. Если она содержит ненулевой вектор, то согласно предложению предыдущего слайда эта система имеет максимальную линейно независимую подсистему. Любые две такие подсистемы линейно эквивалентны и потому согласно следствию сл.9 состоят из одинакового количества векторов. Это обстоятельство позволяет дать следующее

Определение

Если система векторов содержит ненулевой вектор, то ее *рангом* называется количество векторов в максимальной линейно независимой подсистеме, а если все векторы системы нулевые, то ее *ранг* равен нулю по определению.

Ранг системы $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ будем обозначать через $\mathrm{r}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Линейные зависимости столбцов матрицы

Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ – матрица из скаляров. Обозначим ее столбцы через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Это векторы из пространства столбцов F_k.

Предложение

Если матрица $B = (\beta_{ij})_{k'\times n}$ получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований строк и отбрасывания получающихся нулевых строк ($k' \leq k$), то для любых скаляров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$
$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = O$ тогда и только тогда, когда
$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n = O$.
Другими словами, при выполнении элементарных преобразований над строками матрицы и отбрасывания получающихся нулевых строк все линейные зависимости между столбцами сохраняются.

$\Downarrow$ Условие $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = O$ равносильно тому, что для $i = 1, \ldots, k$ имеют место равенства $\lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \ldots + \lambda_n\alpha_{in} = 0$.
Докажем, что из $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = O$ следует
$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n = O$.
Для доказательства достаточно рассмотреть случай одного элементарного преобразования строк матрицы и отбрасывания нулевой строки. В последнем случае требуемое выполняется очевидным образом, как и в случае перестановки строк.

Пусть строка $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in})$ матрицы B получается из строки $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ матрицы A умножением на ненулевой скаляр δ, т.е. $\beta_{ij} = \delta\alpha_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда $\lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \ldots + \lambda_n\beta_{in} = \lambda_1\delta\alpha_{i1} + \lambda_2\delta\alpha_{i2} + \ldots + \lambda_n\delta\alpha_{in} = \delta(\lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \ldots + \lambda_n\alpha_{in}) = 0$. Остальные строки матрицы B совпадают с соответствующими строками матрицы A. Следовательно, $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n = O$.

Пусть строка $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots, \beta_{in})$ матрицы B получается из строки $(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$ матрицы A прибавлением строки $(\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \ldots, \alpha_{pn})$, умноженной на скаляр δ, т.е. $\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \delta\alpha_{pj}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда $\lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \ldots + \lambda_n\beta_{in} = \lambda_1(\alpha_{i1} + \delta\alpha_{p1}) + \lambda_2(\alpha_{i2} + \delta\alpha_{p2}) + \ldots + \lambda_n(\alpha_{in} + \delta\alpha_{pn}) = \lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \ldots + \lambda_n\alpha_{in} + \delta(\lambda_1\alpha_{p1} + \lambda_2\alpha_{p2} + \ldots + \lambda_n\alpha_{pn}) = 0$. Остальные строки матрицы B совпадают с соответствующими строками матрицы A. Следовательно, $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n = O$.

Таким образом, доказано, что из $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = O$ следует $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n = O$. Так как все элементарные преобразования строк обратимы (т.е. от матрицы B можно вернуться к матрице A с помощью преобразования того же типа, что и преобразование, превращающее A в B), этим доказательство предложения завершается. $\Uparrow$

Алгоритм нахождения нетривиальных линейных зависимостей между векторами-строками

Пусть $a_1, \ldots, a_k \in F^n$. Чтобы найти линейные зависимости между этими векторами, составим из их элементов матрицу, располагая элементы строки в столбце. Получим матрицу A размеров $n \times k$ из скаляров. Используя элементарные преобразования строк, перестановки столбцов и отбрасывая получающиеся нулевые строки, приведем A к виду $B = (E_p|B_1)$, где E_p – единичная матрица порядка $p \leq k$. Это делается точно так же, как при преобразовании расширенной матрицы системы линейных уравнений во время решения этой системы методом Гаусса-Жордана (сл.43 т.1-5).

Если $p = k$, т.е. в результате преобразований получается единичная матрица, то B_1 отсутствует и система $(a_1, \ldots, a_k)$ линейно независима.

При $p < k$ строки $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_p})$, которые соответствуют первым p столбцам матрицы B, образуют максимальную линейно независимую подсистему в системе $(a_1, \ldots, a_k)$. Для каждого столбца $(\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$ матрицы B_1 можно записать выражение соответствующего ему вектора a_m из системы $(a_1, \ldots, a_k)$: $a_m = \beta_1 a_{i_1} + \ldots + \beta_p a_{i_p}$.

Обоснование алгоритма получается с помощью предложения сл.11.

Пример 1

Найти ранг и максимальную линейно независимую подсистему системы векторов-строк $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 4, 5, 6)$, $a_3 = (4, 3, 2, 1)$.

Запишем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ и преобразуем ее, как показано на сл.3.

Получим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Тогда, так как столбцы не переставлялись, (a_1, a_2) – максимальная линейно независимая подсистема и $a_3 = -\frac{7}{2}a_1 + \frac{5}{2}a_2$, а $\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3) = 2$.

Найти ранг и максимальную линейно независимую подсистему системы векторов-строк $a_1 = (1,2,3,4)$, $a_2 = (2,3,4,5)$, $a_3 = (6,7,8,9)$, $a_4 = (3,4,6,5)$, $a_5 = (4,5,5,8)$.

Запишем и преобразуем матрицу

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -10 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_4 & a_3 & a_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Система a_1, a_2, a_4 будет максимальной независимой подсистемой; $a_3 = -4a_1 + 5a_2$, $a_5 = -3a_1 + 5a_5 - a_4$, а $r(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 3$.

Напомним, что матрица называется *ступенчатой по строкам*, если в начале каждой ее ненулевой строки, начиная со второй, расположено больше нулей, чем в начале предыдущей строки, и все нулевые строки, если они есть, записаны последними.

Предложение

Система всех ненулевых строк ступенчатой по строкам матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ линейно независима.

$\Downarrow$ Предположим, не ограничивая общности, что все строки матрицы A ненулевые. Так как A ступенчатая по строкам, для каждого $i = 1, \ldots, k$ обозначим через j_i наименьший индекс, для которого $\alpha_{ij_i} \neq 0$. Тогда при $i > 1$ и $1 \leq j < j_i$ имеем $\alpha_{ij} = 0$. Кроме того, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Обозначим строки матрицы A через $a_1, a_2 \ldots, a_k$. Пусть $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = O$. Тогда $\lambda_1\alpha_{1j_1} = 0$, $\lambda_1\alpha_{1j_2} + \lambda_2\alpha_{2j_2} = 0, \ldots,$ $\lambda_1\alpha_{1j_k} + \lambda_2\alpha_{2j_k} + \ldots + \lambda_k\alpha_{kj_k} = 0$. Из первого равенства получаем $\lambda_1 = 0$, из второго – $\lambda_2 = 0$, и так далее, из p-го равенства получим, что $\lambda_p = 0$ $(p = 3, \ldots, k)$. Этим доказана линейная независимость системы строк $(a_1, a_2 \ldots, a_k)$.$\Uparrow$