Тема 2-19: Билинейные и квадратичные формы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Определение

Пусть V – линейное пространство над полем F. *Билинейной функцией* на пространстве V называется отображение $\mathcal{B} : V \times V \longrightarrow F$, линейное по каждому аргументу, т.е. такое, что $\forall x, y, z \in V\ \forall \lambda \in F$
$\mathcal{B}(x + y, z) = \mathcal{B}(x, z) + \mathcal{B}(y, z)$, $\mathcal{B}(\lambda x, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z)$ (линейность по первому аргументу) и
$\mathcal{B}(x, y + z) = \mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(x, z)$, $\mathcal{B}(x, \lambda z) = \lambda \mathcal{B}(x, z)$ (линейность по второму аргументу).

Примером билинейной функции является скалярное произведение на евклидовом пространстве.

Вычислим значение билинейной функции $\mathcal{B}$ на векторах $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j$, которые линейно выражаются через системы $(e_1, \ldots, e_m)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ соответственно. Имеем $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j\right) =$
$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(\xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathcal{B}(e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathcal{B}(e_i, f_j) =$
$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \mathcal{B}(e_i, f_j)$. Таким образом, получаем формулу

$$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \mathcal{B}(e_i, f_j). \qquad (1)$$

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на V.

Определение

Пусть $C = (c_1, \ldots, c_n)$ – базис пространства V. Положим $\beta_{ij} = \mathcal{B}(c_i, c_j)$. *Матрицей* билинейной функции $\mathcal{B}$ в базисе C называется матрица $(\beta_{ij})_{n\times n}$.
Обозначение: B_C, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$.

Вычислим значение билинейной функции $\mathcal{B}$ на векторах $x = \sum_{i=1}^n \xi_i c_i$, $y = \sum_{j=1}^n \eta_j c_j$ через их столбцы координат $[x]_C$, $[y]_C$ и матрицу функции $\mathcal{B}$ в базисе C, используя формулу (1) сл.2:
$\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i c_i, \sum_{j=1}^n \eta_j c_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \mathcal{B}(c_i, c_j) =$
$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \beta_{ij} = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij}\eta_j\right) = [x]_C^\top \cdot (B_C \cdot [y]_C)$.
Получаем формулу

$$\mathcal{B}(x, y) = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [y]_C. \tag{2}$$

Формой принято называть однородный многочлен от нескольких переменных, т.е. многочлен, у которого все одночлены имеют одинаковые степени. Например, линейная форма от n переменных над полем F имеет вид $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. При вычислении значения билинейной функции по координатам векторов в базисе получается значение билинейной формы (т.е. формы от набора переменных, разбитого на две равные части так, что форма линейна по каждой части набора переменных) от координат векторов.

Определение

Билинейной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ над полем F называется многочлен $b(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i y_j$, где $\beta_{ij} \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Матрицей* билинейной формы называется матрица $(\beta_{ij})_{n \times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Например, билинейная форма $x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 5x_1 y_3 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2 - 6x_2 y_3 - 9x_3 y_1 + 8x_2 y_2 - 7x_2 y_3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -6 \\ -9 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на V. Пусть C и C' – базисы пространства V, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_{C'} B'$. Выясним связь между матрицами B и B'. Обозначим через T матрицу перехода от базиса C к базису C'. Пусть $x, y \in V$. Так как $[x]_C = T \cdot [x]_{C'}$ и $[y]_C = T \cdot [y]_{C'}$, с помощью формулы (2) сл.3 получаем $[x]_{C'}^\top \cdot B_{C'} \cdot [y]_{C'} = \mathcal{B}(x, y) = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [y]_C = (T \cdot [x]_{C'})^\top \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'} = [x]_{C'}^\top \cdot T^\top \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'}$. Следовательно, для любых $x, y \in V$ справедливо равенство $[x]_{C'}^\top \cdot B_{C'} \cdot [y]_{C'} = [x]_{C'}^\top \cdot T^\top \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'}$. Таким образом, получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы билинейной функции при изменении базиса

$$B_{C'} = T^\top \cdot B_C \cdot T. \tag{3}$$

Симметричные билинейные функции

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на V.

Определение

Билинейная функция $\mathcal{B}$ называется *симметричной*, если $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x)$ для любых $x, y \in V$.

Предложение

Следующие условия эквивалентны для билинейной функции $\mathcal{B}$:
(1) $\mathcal{B}$ является симметричной билинейной функцией;
(2) матрица B билинейной функции $\mathcal{B}$ в любом базисе является симметрической, т.е. $B^\top = B$;
(3) матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в некотором базисе является симметрической.

$\Downarrow$ Из определения матрицы билинейной функции получаем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Очевидно, что (2) $\Rightarrow$ (3). Покажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть C – базис V, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$ и $B^\top = B$. Для любых $x, y \in V$ с помощью формулы (2) сл.3 получаем $\mathcal{B}(x, y) = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [y]_C$, $\mathcal{B}(y, x) = [y]_C^\top \cdot B_C \cdot [x]_C$. Так как $[y]_C^\top \cdot B_C \cdot [x]_C = ([y]_C^\top \cdot B_C \cdot [x]_C)^\top = [x]_C^\top \cdot B_C^\top \cdot [y]_C^{\top\top} = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [y]_C$, заключаем, что $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x)$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Симметричные билинейные функции (1)

Теорема

Пусть V – n-мерное евклидово пространство. Для любой симметричной билинейной функции $\mathcal{B}$ на V существует ортонормированный базис пространства V, в котором $\mathcal{B}$ имеет диагональную матрицу.

$\Downarrow$ Пусть C – ортонормированный базис пространства V, и B – матрица формы $\mathcal{B}$ в этом базисе. Матрица B определяет в базисе C самосопряженный линейный оператор $\overline{\mathcal{B}}$. В силу формулы (3) сл.5 и формулы изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса (сл.19 т.2-7), учитывая предложение сл.16 т.2-18, заключаем, что функция $\mathcal{B}$ и оператор $\overline{\mathcal{B}}$ в любом ортонормированном базисе имеют одинаковые матрицы. Применение теоремы сл.14 т.2-18 завершает доказательство, так как в базисе из собственных векторов оператор $\overline{\mathcal{B}}$ имеет диагональную матрицу (с корнями характеристического многочлена χ_B на главной диагонали).$\Uparrow$

С технической точки зрения нахождение ортонормированного базиса, в котором симметрическая билинейная функция имеет диагональную матрицу, не отличается от нахождения ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного линейного оператора (см. сл.17-19 т.2-18).

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F, характеристика которого отлична от 2.

Определение

Квадратичной функцией на линейном пространстве V называется отображение $\mathcal{K} : V \longrightarrow F$, для которого существует билинейная функция $\mathcal{B}$ на V такая что $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$. *Матрицей* квадратичной функции $\mathcal{K}$ в базисе C называется матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в этом базисе.

Из формулы (2) сл.3 получаем формулу для вычисления значения квадратичной функции от вектора.

$$\mathcal{K}(x) = [x]_C^{\top} \cdot B_C \cdot [x]_C. \tag{4}$$

При изменении базиса матрица квадратичной функции изменяется в соответствии с формулой (3) сл.5.

Очевидно, что если квадратичная функция $\mathcal{K}(x)$ определена с помощью билинейной функции $\mathcal{B}(x, y)$, то симметричная билинейная функция $\frac{1}{2}(\mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(y, x))$ определяет ту же самую квадратичную функцию $\mathcal{K}(x)$.

Предложение

Симметричная билинейная функция определяется по заданной с ее помощью квадратичной функции однозначно.

В самом деле, легко вычислить, что если $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$ и $\mathcal{B}$ – симметричная билинейная функция, то $\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathcal{K}(x + y) - \mathcal{K}(x) - \mathcal{K}(y))$.

Из теоремы сл.7 вытекает

Следствие

Пусть V – n-мерное евклидово пространство. Для любой квадратичной функции $\mathcal{K}$ существует ортонормированный базис пространства V, в котором $\mathcal{K}$ имеет диагональную матрицу.

Понятие квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой от переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем F называется многочлен $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$, где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in F$, $i, j = 1, \dots, n$. *Матрицей* квадратичной формы называется матрица $(\alpha_{ij})_{n \times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Формулу из определения можно переписать, приведя подобные члены: $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2\alpha_{ij} x_i x_j$. Матрица $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ квадратичной формы $f(x_1, \dots, x_n)$ по определению является симметрической. Из формулы (4) сл.8 получаем *матричное представление* квадратичной формы (где $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$ – столбец переменных):

$$f(X) = X^\top \cdot A \cdot X. \tag{5}$$

Квадратичная форма служит для вычисления значения квадратичной функции по координатам вектора в данном базисе. Квадратичная функция определяет семейство эквивалентных друг другу квадратичных форм, по одной для каждого базиса. При переходе к другому базису матрица квадратичной формы изменяется в соответствии с формулой (3) сл.5. Это можно представить как линейную замену переменных в квадратичной форме.

Пусть $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем F.

Определение

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ – два набора переменных. Система равенств

$$\begin{cases} x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{21}y_2 + \ldots + \tau_{n1}y_n, \\ x_2 = \tau_{12}y_1 + \tau_{22}y_2 + \ldots + \tau_{n2}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \tau_{1n}y_1 + \tau_{2n}y_2 + \ldots + \tau_{nn}y_n, \end{cases}$$

где $\tau_{ij} \in F$, называется *заменой переменных*. *Матрицей замены* называется квадратная матрица $T = (\tau_{ij})_{n \times n}$. Замена называется *невырожденной*, если $|T| \neq 0$. Замену можно кратко записать в матричной форме $X = T \cdot Y$, где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$.

При подстановке в квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо $x_1, \ldots, x_n$ их выражений из замены переменных и выполнении необходимых преобразований получается новая квадратичная форма $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Используя матричное представление, можно найти связь между этими формами (повторив вывод формулы (3) сл.5). Имеем в силу (5) (сл. 10) $f(X) = X^\top \cdot A \cdot X = (T \cdot Y)^\top \cdot A \cdot T \cdot Y = Y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot T \cdot Y = g(Y)$, откуда следует, что $g(Y)$ имеет матрицу

$$B = T^\top \cdot A \cdot T. \tag{6}$$

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2 \dots, x_n)$ *эквивалентна* квадратичной форме $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$, если существует невырожденная замена переменных $X = T \cdot Y$, которая переводит форму $f(X)$ в $g(Y)$.

Определенное только что отношение является отношением эквивалентности. Проверку предлагается выполнить самостоятельно.

Определение

Рангом квадратичная формы называется ранг ее матрицы. Обозначение: $\mathrm{r}(f)$.

Из формулы (6) сл. 11 и утверждения 5 теоремы сл. 13 т.2-5 непосредственно следует

Предложение

Если квадратичные формы эквивалентны, то их ранги совпадают.

Предложение позволяет определить ранг квадратичной функции как ранг любой матрицы этой функции. Аналогично можно определить ранг билинейной функции.

Пусть $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем F характеристики, отличной от 2.

Определение

Форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ имеет *канонический вид*, если при $i \neq j$ все коэффициенты при $x_i x_j$ равны 0. При $F = \mathbb{R}$ (соотв. $F = \mathbb{C}$) форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ имеет *нормальный вид*, если она имеет канонический вид и ненулевые коэффициенты при квадратах имеют модуль 1 (соотв. равны 1).

Очевидно, что квадратичная форма имеет канонический вид тогда и только тогда, когда ее матрица диагональная. Ранг квадратичной формы в каноническом виде равен числу ее ненулевых коэффициентов.
Если после замены переменных $X = T \cdot Y$ квадратичная форма $f(X)$ превращается в форму $g(Y)$ канонического вида, то говорят, что *замена $X = T \cdot Y$ приводит квадратичную форму $f(X)$ к каноническому виду*.
От канонического вида легко перейти к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть $f(X) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Положим для $j = 1, \ldots, n$ $x_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|}} y_j, & \text{если } \alpha_j \neq 0; \\ y_j, & \text{если } \alpha_j = 0. \end{cases}$ Тогда при $\alpha_j \neq 0$ вместо $\alpha_j x_j^2$ получим $\pm y_j^2$ (знак тот же, что у числа α_j). Очевидно, что эта замена невырожденная. В случае поля $\mathbb{C}$ вместо корня из модуля можно взять корень из самого числа α_j (см. сл.10 т.1-8).

Теорема

Для любой квадратичной формы $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ над полем F характеристики, отличной от 2 существует невырожденная замена переменных, которая приводит эту форму к каноническому виду.

$\Downarrow$ Используем индукцию по числу переменных квадратичной формы. При $n = 1$ форма $f(x_1) = \alpha_{11}x_1^2$ имеет канонический вид и доказывать нечего. Предположим, что требуемое уже доказано для всех квадратичных форм от $1 \leq m < n$ переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\alpha_{ij}x_i x_j$ – ненулевая квадратичная форма от n переменных. Рассмотрим два возможных случая.

1. Форма не содержит квадратов, т.е. $\alpha_{ii} = 0$ при $i = 1, \ldots, n$. В этом случае с помощью искусственного приема получаем форму, у которой имеются ненулевые коэффициенты при квадратах. Пусть $\alpha_{ij} \neq 0$. Положим $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, $x_k = y_k$ при $k \notin \{i, j\}$. Легко вычислить, что мы получаем невырожденную замену переменных (так как $\mathrm{char}(F) \neq 2$). которая превращает исходную форму в форму, содержащую $2\alpha_{ij}y_i^2$.

2. Форма содержит квадраты. Предположим, что $\alpha_{11} \neq 0$. Это предположение не ограничивает общности, так как можно перенумеровать переменные – это невырожденная замена переменных, а две последовательные невырожденные замены можно заменить одной.

Запишем $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^n \alpha_{1j}x_1x_j + f_1(x_2, \ldots, x_n)$. Выделим полный квадрат в группе слагаемых $\alpha_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^n \alpha_{1j}x_1x_j =$
$\alpha_{11}(x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j) = \alpha_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j)^2 - \alpha_{11}\left(\sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j\right)^2$.
Положим $z_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j$ и обозначим через $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ квадратичную форму, полученную путем преобразования выражения $\alpha_{11}\left(\sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n)$. Имеем
$f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \alpha_{11}z_1^2 + f_2(x_2, \ldots, x_n)$. По предположению индукции существует невырожденная замена переменных
$(x_2, \ldots, x_n)^\top = T_1 \cdot (z_2, \ldots, z_n)^\top$, которая приводит форму $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду $\beta_2z_2^2 + \ldots + \beta_nz_2^n$. Тогда
$(z_2, \ldots, z_n)^\top = T_1^{-1} \cdot (x_2, \ldots, x_n)^\top$. Добавив к этой замене равенство $z_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j$, получаем невырожденную замену
$(z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top = T \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, где матрица T получается из матрицы T_1^{-1} окаймлением слева первым столбцом матрицы E_n и сверху строкой $\left(1, \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\right)$. Тогда, разлагая по первому столбцу, получаем
$|T| = |T_1^{-1}| \neq 0$. Следовательно, невырожденная замена
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top = T^{-1} \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top$ приводит квадратичную форму $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ к каноническому виду $\alpha_{11}z_1^2 + \beta_2z_2^2 + \ldots + \beta_nz_2^n$. Это завершает доказательство.$\Uparrow$

1. Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_4$.

Сначала сделаем замену переменных $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$, чтобы получить квадраты, затем выделим полные квадраты: $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_4 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_4 =$ $y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - (y_2^2 - 2y_2y_4 + y_4^2 - y_4^2) = (y_1 + y_3)^2 - y_3^2 - (y_2 - y_4)^2 + y_4^2$. Сделав замену $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2 - y_4$, $z_3 = y_3$, $z_4 = y_4$, получаем канонический вид $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + z_4^2$. Чтобы найти невырожденную замену, выразим сначала y_i через z_i: $y_1 = z_1 - z_3$, $y_2 = z_2 + z_4$, $y_3 = z_3$, $y_4 = z_4$, а затем подставим в формулы для x_i: $x_1 = z_1 + z_2 - z_3 + z_4$, $x_2 = z_1 - z_2 - z_3 - z_4$, $x_3 = z_3$, $x_4 = z_4$.

2. Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

Имеем $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 = 9(x_1^2 - 2x_1(\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3)) = 9((x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 - $ $-(\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2) = 9y_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3$, где $y_1 = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3$. Следовательно, $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = 9y_1^2$. Замена переменных: $x_1 = y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.

Приводить квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$ к каноническому виду возможно, используя следствие сл.9. Мы считаем, что квадратичная форма определяет квадратичную функцию на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ в стандартном ортонормированном базисе своей матрицей, и находим для этой функции ортонормированный базис, в котором она имеет диагональную матрицу. Этот базис состоит из собственных векторов соответствующего самосопряженного оператора, которые и определяют главные оси. Ортогональная матрица перехода к этому базису определяет замену переменных, приводящую форму к каноническому виду. Эту замену также называют ортогональной. Выполнять ее нет необходимости: диагональная матрица формы записывается с помощью собственных значений соответствующего самосопряженного оператора.

На этом способе основано преобразование ортонормированного базиса в системе координат в пространстве для упрощения уравнения квадрики (чтобы в нем остались только квадраты и первые степени переменных).

Так как указанный способ требует вычисления характеристического многочлена матрицы квадратичной формы, нахождения его корней и построения ортонормированного базиса из собственных векторов, его следует применять только в задачах, где явно сказано, что квадратичную форму нужно привести к главным осям. В остальных случаях следует использовать основанный на доказательстве теоремы сл.14 метод Лагранжа, использованный при решении примеров сл.16.

Привести к главным осям квадратичную форму
$2x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+4x_4^2-4x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3+2x_3x_4$.

Запишем матрицу формы и вычислим ее характеристический многочлен (прибавляем 3-ю строку к 2-й, вычитаем 3-й столбец из 2-го, используем теорему Лапласа): $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0\\ -2 & 6 & -3 & 1\\ 2 & -3 & 6 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$; $\chi_A(x)=$

$$=\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 2 & 0\\ -2 & 6-x & -3 & 1\\ 2 & -3 & 6-x & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2-x & -2 & 2 & 0\\ 0 & 3-x & 3-x & 2\\ 2 & -3 & 6-x & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4-x\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & -4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3-x & 2\\ 2 & x-9 & 6-x & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4-x\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 3-x & 2\\ 1 & 4-x\end{vmatrix}(-1)^{2+4+3+4}\begin{vmatrix} 2-x & -4\\ 2 & x-9\end{vmatrix}=(x^2-7x+10)(x^2-11x+10).$$

Находим корни $\chi_A(x)$ (коэффициенты при квадратах в каноническом виде после приведения к главным осям): $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=5$, $\lambda_4=10$.

Пример (1)

Находим ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного линейного оператора, заданного в исходном ортонормированном базисе матрицей A. Ищем собственный вектор для значения $\lambda_1 = 1$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Нормируем собственный вектор $(-4,-1,1,0)$, получаем первый вектор $e_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4,-1,1,0)$. Остальные векторы принадлежат подпространству, порожденному векторами $(1,-2,2,0)$, $(0,1,1,1)$, $(0,0,0,1)$. Находим их образы при операторе, заданном матрицей $A-2E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ищем собственный вектор для значения $\lambda_2 = 2$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 8 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 8 & -16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нормируем собственный вектор $(0,1,1,-1)$, получаем второй вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,-1)$. Остальные векторы принадлежат подпространству, порожденному векторами $(1,-2,2,0)$, $(0,1,1,2)$. Находим их образы при операторе, заданном матрицей $A-5E$:
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Нормируем собственный вектор $(0,1,1,2)$, получаем третий вектор $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0,1,1,2)$. Последний вектор принадлежат подпространству, порожденному вектором $(1,-2,2,0)$. Находим вектор $e_4 = \frac{1}{3}(1,-2,2,0)$. Искомый ортонормированный базис состоит из векторов e_1, e_2, e_3, e_4. Матрица перехода к этому базису является матрицей ортогональной замены переменных $X = T \cdot Y$: $T = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Канонический вид квадратичной формы: $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + 10y_4^2$. Делать подстановку в исходную квадратичную форму не следует, так как коэффициенты канонического вида – собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Найти каноническую систему координат, каноническое уравнение и определить тип квадрики в зависимости от значения параметра α:
$4x^2+4y^2-2z^2+4xy-8xz+8yz+12x-12y+24z+\alpha=0$.

Выпишем из уравнения квадратичную форму
$4x^2+4y^2-2z^2+4xy-8xz+8yz$ и приведем ее к главным осям. Матрица
$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\chi_A=\begin{vmatrix} 4-x & 2 & -4 \\ 2 & 4-x & 4 \\ -4 & 4 & -2-x \end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix} 6-x & 6-x & 0 \\ 2 & 4-x & 4 \\ 0 & 12-2x & 6-x \end{vmatrix}=(6-x)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4-x & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-(x-6)^2(x+6)$.
Собственные значения $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-6$. Собственные векторы находим сначала для собственного значения большей кратности.
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Для $\lambda_1=6$ получаем два линейно независимых собственных вектора $a_1=(1,1,0)$ и $a_2=(0,2,1)$. Так как скалярное произведение $(a_1,a_2)=2$, к ним следует применить процесс ортогонализации (сл.5-7 т.2.15). Для $\lambda_2=$ $=-6$ собственный вектор $b_3=(1,-1,2)$, находится по вектору $(2,-2,4)$.

Имеем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \gamma b_1$, где $\gamma = -\frac{(f_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -1$. Таким образом, $b_2 = (-1, 1, 1)$. Нормируя векторы b_1, b_2, b_3, получаем ортонормированный базис из собственных векторов, определяющих главные оси: $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$. Заменим систему координат, сохранив прежнее начало координат и взяв в качестве базиса (f_1, f_2, f_3). Формулы преобразования координат:

$(x, y, z)^\top = T \cdot (x_1, y_1, z_1)^\top$, где $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$. При переходе в новую систему координат квадратичная форма из уравнения квадрики примет вид $6x_1^2 + 6y_1^2 - 6z_1^2$. Вычислим линейную форму: $12x - 12y + 24z = 12(1, -1, 2) \cdot (x, y, z)^\top = 12(1, -1, 2) \cdot T \cdot (x_1, y_1, z_1)^\top = 12(0, 0, \sqrt{6}) \cdot (x_1, y_1, z_1)^\top = 12\sqrt{6}z_1$. Запишем уравнение квадрики в новой системе координат: $6x_1^2 + 6y_1^2 - 6z_1^2 + 12\sqrt{6}z_1 + \alpha = 0$. Сократим на 6 и выделим полный квадрат по z_1:
$x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + 2\sqrt{6}z_1 + \alpha/6 = x_1^2 + y_1^2 - (z_1 - \sqrt{6})^2 + 6 + \alpha/6 = 0$, откуда, перенося начало системы координат в точку $O_1(0, 0, \sqrt{6})$, получаем каноническую систему координат и окончательный вид уравнения $x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 = -\frac{\alpha+36}{6}$ (здесь $x_2 = x_1, y_2 = y_1, z_2 = z_1 - \sqrt{6}$). При $\alpha < -36$ получается однополостный гиперболоид, при $\alpha = -36$ получается конус 2-го порядка, при $\alpha > -36$ – двуполостный гиперболоид.

Теорема

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. В любом нормальном виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ количество слагаемых с коэффициентом 1 и количество слагаемых с коэффициентом -1 постоянны и не зависят от способа приведения.

$\Downarrow$ Пусть невырожденная замена переменных $X = T \cdot Y$ приводит форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ к нормальному виду

$$y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 (r = \mathrm{r}(f)), \tag{7}$$

и невырожденная замена переменных $X = S \cdot Z$ приводит ту же форму к нормальному виду

$$z_1^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2. \tag{8}$$

Предположим, что $k > m$, и приведем это предположение к противоречию. При $m = 0$ придадим $y_1, \ldots, y_k$ значение 1, $y_{k+1}, \ldots, y_n$ значение 0. Тогда $z_1, \ldots, z_n$ определяются из замены переменных $Z = (S^{-1} \cdot T) \cdot Y$ и равенство $k = -z_1^2 - \ldots - z_n^2$ противоречиво.

Окончание доказательства теоремы

Пусть $m > 0$. Невырожденная замена переменных $Z = (S^{-1} \cdot T) \cdot Y$ переводит форму (8) в (7). Распишем эту замену:

$$\begin{cases} z_1 = \sigma_{11} y_1 + \ldots + \sigma_{1k} y_k + \sigma_{1,k+1} y_{k+1} + \ldots + \sigma_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m = \sigma_{m1} y_1 + \ldots + \sigma_{mk} y_k + \sigma_{m,k+1} y_{k+1} + \ldots + \sigma_{mn} y_n, \\ z_{m+1} = \sigma_{m+1,1} y_1 + \ldots + \sigma_{m+1,k} y_k + \sigma_{m+1,k+1} y_{k+1} + \ldots + \sigma_{m+1,n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \sigma_{n1} y_1 + \ldots + \sigma_{nk} y_k + \sigma_{n,k+1} y_{k+1} + \ldots + \sigma_{nn} y_n. \end{cases}$$

Подставим вместо y_i числа γ_i, полагая $\gamma_i = 0$ при $i = k+1, \ldots, n$, а вместо z_j – числа δ_j, полагая $\delta_j = 0$ при $j = 1, \ldots, k$ так, чтобы выполнялось равенство $(\delta_1, \ldots, \delta_n)^\top = (S^{-1} \cdot T) \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$. Учитывая (8) и (7), получим равенство $\gamma_1^2 + \ldots + \gamma_k^2 = -\delta_{m+1}^2 - \ldots - \delta_r^2$. Покажем, что можно выбрать $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ так, что не все эти числа будут равны 0. Тогда последнее равенство будет противоречиво. Для определения $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ получаем однородную систему линейных уравнений $\begin{cases} \sigma_{11}\gamma_1 + \ldots + \sigma_{1k}\gamma_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{m1}\gamma_1 + \ldots + \sigma_{mk}\gamma_k = 0, \end{cases}$
в которой число уравнений меньше числа неизвестных. В силу теоремы сл.23 т.1-5 эта система имеет ненулевое решение. Таким образом, получили противоречие, которое показывает, что $k \le m$. Аналогично доказывается, что $m \le k$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. В силу теоремы сл.23 корректны следующие определения.

Определения

Количество коэффициентов 1 (соотв. -1) в нормальном виде квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ее *положительным* (соотв. *отрицательным*) *индексом инерции*. *Сигнатурой* квадратичной формы называется разность между ее положительным и отрицательным индексами инерции.

Следствие

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$, $g(y_1,\ldots,y_n)$ – квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$. Для того, чтобы эти формы были эквивалентны над полем $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые положительные и одинаковые отрицательные индексы инерции.

$\Downarrow$ Необходимость обеспечивается законом инерции (сл.23). Для доказательства достаточности следует привести формы $f(x_1,\ldots,x_n)$ и $g(y_1,\ldots,y_n)$ к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$ и сопоставить каждой переменной, квадрат которой входит в нормальный вид формы $f(x_1,\ldots,x_n)$ с коэффициентом 1, переменную с тем же свойством из нормального вида формы $g(y_1,\ldots,y_n)$. Оставшиеся переменные каждого нормального вида также сопоставляются. Таким образом можно получить невырожденную замену, которая преобразует $f(x_1,\ldots,x_n)$ в $g(y_1,\ldots,y_n)$.$\Uparrow$

Пример

Выяснить, эквивалентны ли над полем $\mathbb{R}$ квадратичные формы
$f = 2x_1^2 + 9x^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ и
$g = 2y_1^2 + 3y^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

Сначала приведем эти формы к каноническому виду. Имеем
$2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 = 2(x_1^2 + 2x_1(2x_2 - x_3)) + (2x_2 - x_3)^2 - (2x_2 - x_3)^2) =$
$2z_1^2 - 8x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2$, где $z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$. Тогда
$f = 2z_1^2 + x^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = 2z_1^2 + (x^2 - x_3)^2 = 2z_1^2 + z_2^2$, где $z_2 = x_2 - x_3$.
Таким образом, замена $z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$, $z_2 = x_2 - x_3$, $z_3 = x_3$ приводит форму f к каноническому виду $2z_1^2 + z_2^2$.
Аналогично для формы g имеем $2y_1^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 =$
$2(y_1^2 - 2y_1(y_2 + y_3) + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 + y_3)^2) = 2u_1^2 - 2y^2 - 2y_3^2 - 4y_2y_3$, где
$u_1 = y_1 - y_2 - y_3$, откуда $g = 2u_1^2 + y^2 + 4y_3^2 + 4y_2y_3 = 2u_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2 =$
$= 2u_1^2 + u_2^2$, где $u_2 = y_2 + 2y_3$. Таким образом, замена $u_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $u_2 = y_2 + 2y_3$, $u_3 = y_3$ приводит форму g к каноническому виду $2u_1^2 + u_2^2$.
Мы видим, что формы f и g эквивалентны. Чтобы найти замену переменных, которая переводит форму f в форму g, положим $z_1 = u_1$, $z_2 = u_2$, $z_3 = u_3$. Получаем систему равенств $x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 - x_3 = y_2 + 2y_3$, $x_3 = y_3$, откуда $x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3$, $x_2 = y_2 + 3y_3$, $x_3 = y_3$ – замена переменных, которая переводит форму f в форму g.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. Она определяет функцию от нескольких переменных, которую будем обозначать так же.

Определение

Форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *положительно* (соотв. *отрицательно*) *определенной*, если для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ из $\gamma_1^2 + \ldots + \gamma_n^2 > 0$ следует $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ (соотв. $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$).

Понятия отрицательно и положительно определенной квадратичной формы связаны следующим очевидным утверждением.

Наблюдение

Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда квадратичная форма $(-1) \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$ является положительно определенной.

Эквивалентные условия для положительно определенной квадратичной формы

Теорема

Следующие условия эквивалентны для квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$:
(1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ является положительно определенной;
(2) в любом каноническом виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;
(3) в некотором каноническом виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;
(4) $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ – нормальный вид формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$.

$\Downarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$ – канонический вид формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $X = T \cdot Y$ – соответствующая замена переменных. Положим $y_j = 1$ и $y_i = 0$ при $i \neq j$. Тогда соответствующие значения x_i не все равны нулю, поэтому $f(x_1, \ldots, x_n) > 0$ и $\alpha_j > 0$. Импликации (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (4) и (4) $\Rightarrow$ (1) справедливы очевидным образом. $\Uparrow$

Из теоремы предыдущего слайда и наблюдения сл.28 получается

Следствие

Следующие условия эквивалентны для квадратичной формы $f(x_1, \dots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$:
(1) $f(x_1, \dots, x_n)$ является отрицательно определенной;
(2) в любом каноническом виде формы $f(x_1, \dots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных отрицательны;
(3) в некотором каноническом виде формы $f(x_1, \dots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;
(4) $-y_1^2 - \dots - y_n^2$ – нормальный вид формы $f(x_1, \dots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Угловым главным минором* матрицы A называется минор $\Delta_m = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ 1 & \dots & m \end{pmatrix}$, стоящий в ее первых m строках и первых m столбцах.

Теорема

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) = X^\top \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ с матрицей A. Форма $f(x_1,\dots,x_n)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда у матрицы A все угловые главные миноры Δ_m $(m = 1,\dots,n)$ положительны.

$\Downarrow$ Представим форму $f(x_1,\dots,x_n)$ в виде

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1,\dots,x_{n-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{1j}x_jx_n + \alpha_{nn}x_n^2, \qquad (9)$$

где $f_1(x_1,\dots,x_{n-1})$ – форма, содержащая все слагаемые из $f(x_1,\dots,x_n)$, не содержащие x_n. Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ имеем $f(x_1) = \alpha_{11}x_1^2$, и утверждение теоремы очевидно. Предположим, что оно доказано для всех квадратичных форм от $1 \le k < n$ переменных.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда очевидно, что $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ – также положительно определенная квадратичная форма. Ее матрица является подматрицей матрицы A, стоящей в первых $n-1$ строках и первых $n-1$ столбцах матрицы A, поэтому в силу предположения индукции $\Delta_m > 0$ $(m = 1,\ldots,n-1)$. Сделаем замену $X = T\cdot Y$, которая приводит форму $f(x_1,\ldots,x_n)$ к нормальному виду. В силу формулы (6) (сл. 11) получаем $E_n = T^\top \cdot A\cdot T$. Взяв определители левой и правой части, получаем
$1 = |E_n| = |T^\top \cdot A\cdot T| = |T^\top||A||T| = |T|^2\Delta_n$, откуда $\Delta_n > 0$.

Пусть теперь $f(x_1,\ldots,x_n)$ – квадратичная форма, в матрице которой $\Delta_m > 0$ $(m = 1,\ldots,n)$. По предположению индукции форма $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ из равенства (9) положительно определенная. Пусть $(x_1,\ldots,x_{n-1})^\top = T_1\cdot(y_1,\ldots,y_{n-1})^\top$ – невырожденная замена переменных, которая приводит форму $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ к нормальному виду. Сделав эту подстановку в форму $f(x_1,\ldots,x_n)$, получим $f(x_1,\ldots,x_n) = y_1^2+\ldots+$ $+y_{n-1}^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{1j}y_jx_n + \alpha_{nn}x_n^2 = \sum_{j=1}^{n-1}(y_j+\beta_{1j}x_n)^2 + (\alpha_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1}\beta_{1j}^2)x_n^2$. Положим $\beta_{nn} = \alpha_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1}\beta_{1j}^2$. Сделаем замену $z_j = y_j + \beta_{1j}x_n$ $(j = 1,\ldots,n-1)$, $z_n = x_n$ и обозначим через T матрицу этой замены. Форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ переходит в $z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+\beta_{nn}z_n^2$.

Эта форма имеет диагональную матрицу D, у которой на главной диагонали все элементы, кроме последнего, равны 1. Так как $D = T^\top \cdot A \cdot T$, взяв определители левой и правой части, получим $\beta_{nn} = |T|^2|A| = |T|^2\Delta_n > 0$. Следовательно, форма $f(x_1, \dots, x_n)$ положительно определенная. Теорема доказана.$\Uparrow$

Из теоремы сл.31 и наблюдения сл.28 получаем

Следствие

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = X^\top \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ с матрицей A. Форма $f(x_1, \dots, x_n)$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда у матрицы A все угловые главные миноры Δ_m при нечетных $m = 1, 3, \dots$ отрицательны, а при четных $m = 2, 4, \dots$ положительны.

$\Downarrow$Для доказательства достаточно заметить, что при умножении квадратной матрицы порядка m на -1 ее определитель умножается на $(-1)^m$.$\Uparrow$

Пример

Найти все значения параметра α, при которых квадратичная форма $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4\alpha x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 2\alpha x_2 x_3$ является положительно определенной.

Запишем матрицу квадратичной формы f: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 1 \\ 2\alpha & 3 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 5 \end{pmatrix}$.

Найдем ее угловые главные миноры $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4\alpha^2$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha & 1 \\ 2\alpha & 3 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 5 \end{vmatrix} = 27 - 26\alpha^2$. Согласно критерию Сильвестра, форма f будет положительно определенной при условии $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, т.е. при значениях α таких что $6 - 4\alpha^2 > 0$ и $27 - 26\alpha^2 > 0$. Решая полученную систему неравенств, получаем $|\alpha| < \sqrt{\frac{27}{26}}$.

Теорема

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – положительно определенная, $g(x_1,\dots,x_n)$ – произвольная квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$. Тогда существует невырожденная замена переменных, которая приводит форму $f(x_1,\dots,x_n)$ к нормальному, а форму $g(x_1,\dots,x_n)$ к каноническому виду.

$\Downarrow$ Пусть $X = T\cdot Y$ – невырожденная замена переменных, которая приводит форму $f(x_1,\dots,x_n)$ к нормальному виду $y_1^2+\ldots+y_n^2$. Сделав эту замену в форме $g(x_1,\dots,x_n)$, получим квадратичную форму $g_1(y_1,\dots,y_n)$. Приведем полученную форму к главным осям с помощью ортогональной замены $Y = S\cdot Z$. Форма $y_1^2+\ldots+y_n^2$ при этом перейдет в $z_1^2+\ldots+z_n^2$, так как ее матрица согласно формуле (6) сл.11 превратится в $S^\top\cdot E_n\cdot S = S^\top\cdot S = E_n$. Таким образом, невырожденная замена $X = (T\cdot S)\cdot Z$ приводит форму $f(x_1,\dots,x_n)$ к нормальному, а форму $g(x_1,\dots,x_n)$ к каноническому виду.$\Uparrow$

Найти среди квадратичных форм $f = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_4$ и $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2$ положительно определенную и найти невырожденную замену переменных, которая приводит положительно определенную форму к нормальному, а другую – к каноническому виду.

Запишем матрицу квадратичной формы f: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Так как $\Delta_2 = 0$, форма f не является положительно определенной. Для формы g имеем $g = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2$, т.е. замена $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = x_3 - x_4$, $y_4 = x_4$ приводит форму g к нормальному виду $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$. Выразив x через y, получим $x_1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$, $x_2 = y_2 + y_3 + y_4$, $x_3 = y_3 + y_4$, $x_4 = y_4$. Эта замена имеет матрицу $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Сделаем указанную замену в форме f, используя формулу (6) сл.11. Получим форму $f_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$ с матрицей $B = T^\top \cdot A \cdot T$.

Вычислив произведение матриц, получим $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Приведем форму $f_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$ к главным осям. Сначала найдем

$$\chi_B = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-x & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & x-2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$(x-2)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (x-2)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$-(x-2)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = -(x-2)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$(x-2)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1-x \end{vmatrix} = (x-2)^3(x+2)$. Собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Ищем собственные векторы для $\lambda_1 = 2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получаем собственные векторы $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (1,0,1,0)$, $a_3 = (1,0,0,1)$ для значения $\lambda_1 = 2$ и собственный вектор $a_4 = (-1,1,1,1)$ для значения $\lambda_2 = -2$. Применяем к векторам a_1, a_2, a_3 процесс ортогонализации (сл.5-7 т.2-15). Полагаем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \gamma b_1$, где $\gamma = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{2}$. Имеем $b_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$. Умножив b_2 на 2, получим $b_2 = (1,-1,2,0)$. Найдем $b_3 = a_3 + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2$. Вычислим $\gamma_1 = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{2}$ и $\gamma_2 = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{1}{6}$, тогда $b_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$. Умножив b_3 на 3, получим $b_3 = (1,-1,-1,3)$. Нормируем полученные векторы b_1, b_2, b_3 и a_4, получаем ортонормированный базис $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)$, $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1,-1,-1,3)$, $e_4 = \frac{1}{2}(-1,1,1,1)$. Запишем ортогональную матрицу замены $Y = S \cdot Z$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Замена $X = (T \cdot S) \cdot Z$ приводит форму f к каноническому виду $2z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_3^2 - 2z_4^2$, а форму g к нормальному виду $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.