Тема 2-18: Нормальные операторы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – евклидово или унитарное пространство.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным оператором, т.е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Таким образом, для любого вектора $x \in V$ и нормального оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ справедливо равенство

$$\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^*x). \tag{1}$$

Нормальные операторы обладают рядом интересных свойств. Сначала мы изучим общие свойства таких операторов, а затем рассмотрим отдельно нормальные операторы унитарных пространств и евклидовых пространств.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор конечномерного евклидова или унитарного пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Для любых $x, y \in V$ справедливо равенство $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$.
2. $\text{Ker}\mathcal{A} = \text{Ker}\mathcal{A}^*$.
3. $(\text{Ker}\mathcal{A})^\perp = \text{Im}\mathcal{A}$.
4. $\text{Ker}(\mathcal{A}^2) = \text{Ker}\mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1. Имеем в соответствии с (1) $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}y)) = (x, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*y))$. Так как $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$, продолжаем с использованием равенства (3) сл.10 т.2-17: $(x, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*y)) = (x, (\mathcal{A}^*)^*(\mathcal{A}^*y)) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$. Таким образом, $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$, что и требуется.
Утверждение 2 следует из утверждения 1: $x \in \text{Ker}\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0_V \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = 0_V \Leftrightarrow x \in \text{Ker}\mathcal{A}^*$.
Утверждение 3 непосредственно следует из утверждения 2 этого предложения и утверждения 2 предложения сл.11 т.2-17.
Утверждение 4 следует из утверждения 3, поскольку $\text{Ker}\mathcal{A} \cap \text{Im}\mathcal{A} = \{0_V\}$.$\Uparrow$

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор конечномерного евклидова или унитарного пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Для любого скаляра λ оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ является нормальным.
2. Каждый собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению λ, является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$, относящимся к комплексно сопряженному собственному значению $\overline{\lambda}$.
3. Собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1. Так как $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$, имеем $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}$. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \lambda\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{A} + \lambda\overline{\lambda}\mathcal{E}$ и $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\lambda\mathcal{E}$, откуда следует требуемое. Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 и утверждения 2 предложения сл.3 с учетом предложения сл.4 т.2-11: $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})$. Докажем утверждение 3. Пусть $\mathcal{A}u = \lambda u$, $\mathcal{A}v = \mu v$, где $u, v \neq 0_V$, $\lambda \neq \mu$. Имеем $\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \overline{\mu} v) = \mu(u, v)$, откуда $(u, v) = 0$.$\Uparrow$

Напомним, что для матрицы A через A^* обозначается матрица $\overline{A^\top}$. Из определения нормального оператора и следствия сл.10 т.2-17 с учетом предложения сл.7 т.2-9 вытекает следующее

Предложение

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства V:
(1) $\mathcal{A}$ – нормальный оператор;
(2) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A \cdot A^* = A^* \cdot A$;
(3) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

Определение

Назовем квадратную матрицу A порядка n с комплексными элементами *нормальной*, если $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

Характеризация нормальных операторов унитарных пространств

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства V является нормальным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор конечномерного унитарного пространства V. Так как характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители, по теореме сл.5 т.2-13 V разлагается в прямую сумму корневых подпространств $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$. Поскольку $V(\mathcal{A}, \lambda_j) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$ в силу утверждения 1 сл.4 и утверждения 4 сл.3, корневые подпространства состоят из собственных векторов. В каждом из корневых подпространств выберем ортонормированный базис. Объединение этих базисов дает по утверждению 3 сл.4 ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Обратно, пусть V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Матрица A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе диагональная, на ее главной диагонали стоят собственные значения $\mathcal{A}$. Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ имеет в том же базисе матрицу $A^* = \overline{A^\top}$, которая также является диагональной. Любые диагональные матрицы над полем $\mathbb{C}$ перестановочны, поэтому операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ также перестановочны, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Определение

Квадратная матрица A порядка n с комплексными элементами называется *унитарной*, если $A \cdot A^* = A^* \cdot A = E_n$.

По определению унитарная матрица A является обратимой и $A^{-1} = A^*$.

Предложение

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в конечномерном унитарном пространстве является унитарной.

$\Downarrow$ Пусть V – унитарное пространство, $B = (e_1, \ldots . e_n)$ и $C = (f_1, \ldots . f_n)$ – ортонормированные базисы пространства V, T – матрица перехода от базиса B к базису C. Тогда $T^\top \overline{T} = E_n$, так как $(f_k, f_j) = [f_k]_C^\top \cdot \overline{[f_j]_C}$ – произведение k-й строки матрицы $T^\top$ на j-й столбец матрицы $\overline{T}$ и (f_k, f_j) – элемент δ_{ij} единичной матрицы E_n, поскольку базис C ортонормированный. Таким образом, матрица $T^\top$ невырожденная, следовательно и T невырожденная. Из равенства $T^\top \overline{T} = E_n$ следует $\overline{T^\top} T = E_n$, т.е. $T^{-1} = T^*$.$\Uparrow$

Матричное следствие

Следствие

Квадратная матрица A порядка n с комплексными элементами является нормальной тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица T и диагональная матрица D порядка n такие, что $A = T \cdot D \cdot T^*$.

$\Downarrow$ Легко вычислить, что для любых матриц $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеют место равенства $(X \cdot Y)^* = Y^* \cdot X^*$ и $(X^*)^* = X$. Имеем $(T \cdot D \cdot T^*)^* = T \cdot D^* \cdot T^*$, поэтому если $A = T \cdot D \cdot T^*$, то с учетом равенства $T \cdot T^* = E_n$ получаем $A \cdot A^* = T \cdot D \cdot T^* \cdot T \cdot D^* \cdot T^* = T \cdot D \cdot D^* \cdot T^*$ и аналогично $A^* \cdot A = T \cdot D^* \cdot D \cdot T^*$. Поскольку D и D^* – диагональные матрицы, $D \cdot D^* = D^* \cdot D$ и $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, т.е. A – нормальная матрица. Предположим, что A – нормальная матрица. Определим с помощью матрицы A линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве столбцов $\mathbb{C}_n$, полагая $\mathcal{A}x = A \cdot x$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе B из столбцов единичной матрицы E_n имеет матрицу A. Согласно предложению сл.5 оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. По теореме сл.6 существует ортонормированный базис C в $\mathbb{C}_n$, в котором матрица D оператора $\mathcal{A}$ диагональна. Пусть T – матрица перехода от базиса B к C. Тогда в силу формулы сл.19 т.2-7 $D = T^{-1} \cdot A \cdot T = T^* \cdot A \cdot T$, так как T– унитарная матрица по предложению сл.7. Из равенства $D = T^* \cdot A \cdot T$ следует $A = T \cdot D \cdot T^*$.$\Uparrow$

Линейный оператор $\mathcal{A}$ унитарного пространства в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Убедиться, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, найти для него ортономированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Найдем матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$: $A^* = A^\top =$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что $A^* = -A$, поэтому равенство $A^* \cdot A = A \cdot A^*$ выполняется очевидным образом. Мы доказали, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор.

Найдем характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} =$
$= -x(x^2+3)$. Его корни (собственные значения $\mathcal{A}$) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{3}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{3}$. Найдем собственный вектор, относящийся к значению 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$ Таким образом, $a_1 = (1,1,1)$ – базис $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Нормируем вектор a_1, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Найдем образы векторов $(1,0,-1)$ и $(0,-1,1)$ при действии оператора $\mathcal{A} + i\sqrt{3}\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & i\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1 & i\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & -2 & 1-i\sqrt{3} \\ -2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор для собственного значения $-i\sqrt{3}$: (умножаем 1-ю строку на $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и прибавляем к 2-й)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 0 & -1 & 1+i\sqrt{3} & -2 & 1-i\sqrt{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Таким образом,

$a_2 = (2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3})$ – базис $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} + i\sqrt{3}\mathcal{E})$,
$a_3 = (-2, 1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3})$ – базис $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - i\sqrt{3}\mathcal{E})$. Нормируя эти векторы, получаем $e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3})$, $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2, 1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3})$. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис. В этом базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Из определения самосопряженного оператора и следствия сл.10 т.2-17 с учетом предложения сл.7 т.2-9 вытекает следующее

Предложение

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства V:
(1) $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор;
(2) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A = A^*$;
(3) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A = A^*$.

Определения

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется *эрмитовой*, если $A^* = A$. Напомним, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется *симметрической*, если $A^\top = A$.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения – действительные числа.

$\Downarrow$ Пусть V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения – действительные числа. Тогда матрица A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе – диагональная с действительными числами на главной диагонали. Так как $A = A^*$, оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным.
Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства V является самосопряженным. Тогда $\mathcal{A}$ является нормальным оператором и в силу теоремы сл.6 V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственный вектор v, относящийся к λ. Тогда по утверждению 2 предложения сл.4 v является собственным вектором, относящимся к собственному значению $\overline{\lambda}$ оператора $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Таким образом, $\lambda v = \mathcal{A}v = \overline{\lambda}v$. Из условия $v \neq 0_V$ получаем $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. λ – действительное число. Теорема доказана. $\Uparrow$

Следствие 1

Все корни характеристического многочлена произвольной эрмитовой матрицы, в частности, произвольной симметрической матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

$\Downarrow$ Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица, удовлетворяющая условию следствия. Определим линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве столбцов $\mathbb{C}_n$ с помощью матрицы A, полагая $\mathcal{A}x = A \cdot x$ для любого $x \in \mathbb{C}_n$. Так как этот оператор имеет в ортонормированном базисе из столбцов единичной матрицы E_n матрицу A, в силу предложения сл.11 $\mathcal{A}$ является самосопряженным оператором, и по теореме сл.12 все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ (т.е. корни характеристического многочлена матрицы A) – действительные числа.$\Uparrow$

Следствие 2

Квадратная матрица A порядка n с комплексными элементами является эрмитовой тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица T и диагональная матрица D порядка n с действительными элементами такие, что $A = T \cdot D \cdot T^*$.

$\Downarrow$Это утверждение доказывается аналогично следствию сл.8.$\Uparrow$

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Если V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, то матрица A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе – диагональная (с действительными числами на главной диагонали). Так как $A = A^\top$, оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным.
Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства V является самосопряженным. Тогда его матрица в ортонормированном базисе является симметрической матрицей с действительными элемента и по следствию 1 сл.13 все корни ее характеристического многочлена – действительные числа. Таким образом, характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители. Окончание доказательства может быть проведено точно так же, как и доказательство соответствующей части теоремы сл.6.$\Uparrow$
Другой вариант см. на сл.15. Аналогично может быть доказана и соответствующая часть теоремы сл.6.

⇓Докажем, что евклидово пространство V имеет ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, используя индукцию по $\dim V$. База индукции. При $\dim V = 1$ любой оператор является самосопряженным, и для него ортонормированный базис состоит из орта пространства V.
Шаг индукции. Предположим, что для любого самосопряженного оператора на евклидовом пространстве размерности меньше n существует ортонормированный базис из собственных векторов. Пусть V – евклидово пространство, $\dim V = n$ и $\mathcal{A}$ – самосопряженный линейный оператор на V. Так как характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители, он имеет корень $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и существует собственный вектор-орт e_1 оператора $\mathcal{A}$, относящийся к λ_1. Положим $U = \{e_1\}^{\perp}$. Согласно утверждению 1 предложения сл.11 т.2-17 подпространство U инвариантно относительно $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Поскольку $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ для любых $x, y \in U$, ограничение $\mathcal{A}|_U$ является самосопряженным оператором. Так как $\dim U = n - 1$, к этому ограничению применимо предположение индукции. Следовательно, U имеет ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{A}|_U$, т.е. собственных векторов $\mathcal{A}$. Добавив к этому базису вектор e_1, получим ортонормированный базис V из собственных векторов $\mathcal{A}$, что и требуется доказать.⇑

Определение

Матрица $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *ортогональной*, если $T^\top \cdot T = E_n$.

По определению ортогональная матрица T является обратимой и $T^{-1} = T^\top$. Аналогично предложению сл.7 доказывается следующее

Предложение

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в конечномерном евклидовом пространстве является ортогональной.

Следствие

Квадратная матрица A порядка n с действительными элементами является симметрической тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D порядка n с действительными элементами такие, что $A = T \cdot D \cdot T^\top$.

$\Downarrow$Доказательство проводится так же, как доказательство следствия 2 сл.13.$\Uparrow$

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова пространства, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический многочлен: (вычитаем из 1-й строки 2-ю, из 3-й 4-ю; выносим из 1-й строки $x+1$, из 3-й — $x-1$; к 1-му столбцу прибавляем 2-й, к 3-му 4-й; применяем теорему Лапласа к 1-й и 3-й строкам)

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-x & 1+x & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x^2-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3-x & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x^2-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (x^2-1)(x-1)(x-5) =$$

$(x-1)^2(x+1)(x-5)$. Собственные значения оператора $\mathcal{A}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

Пример (1)

Найдем собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ для собственного значения λ_1:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$ образуют векторы $a_1 = (1, 1, -2, 0)$, $a_2 = (0, 0, -1, 1)$. Так как $(a_1, a_2) = 2$, применяем к векторам a_2, a_1 процесс ортогонализации (сл.5 т.2-15): $b_1 = a_2$; $b_2 = a_1 + \lambda b_1$, $\lambda = -\frac{(a_1, b_1)}{(b_1, b_1)} = -1$; $b_2 = a_1 - b_1 = (1, 1, -1, -1)$. Нормируем векторы b_1 и b_2, получаем ортонормированный базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1)$, $b_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$.

Найдем собственный вектор для λ_2. Найдем образы векторов $(1, 1, 1, 1)$ и $(0, 2, 1, 1)$ при действии оператора $\mathcal{A} + \mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{E})$ образует вектор $b_3 = (-1, 1, 0, 0)$. Проверяем: $(b_1, b_3) = 0$, $(b_2, b_3) = 0$. Нормируем его: $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$. Базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - 5\mathcal{E})$ образует вектор $b_4 = (6, 6, 6, 6)$. Нормируем его: $e_4 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$.

Векторы e_1, e_2, e_3,e_4 образуют ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе:
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица перехода от исходного ортонормированного базиса к ортонормированному базису из собственных векторов $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица. Так как $A_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T = T^\top \cdot A \cdot T$, заключаем, что $A = T \cdot A_1 \cdot T^\top$.

Матрицу T удобно записать в виде $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V называется *изометрическим*, если $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{E}$.

Очевидно, что изометрический оператор $\mathcal{A}$ обратим и $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$.

Наблюдение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V является изометрическим тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ (т.е. когда $\mathcal{A}$ является изоморфизмом пространства V на себя, см. теорему сл.11 т.2-17).
Поэтому для оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ следующие условия эквивалентны:
(1) $\mathcal{A}$ – изометрический оператор;
(2) $\mathcal{A}$ переводит любой ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис;
(3) $\mathcal{A}$ переводит некоторый ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис.

Первое утверждение этого наблюдения вытекает из определений. Оно объясняет смысл термина "изометрический". Второе непосредственно следует из теоремы сл.11 т.2-17.

Из определения изометрического оператора и следствия сл.10 т.2-17 с учетом предложения сл.7 т.2-9 и определения унитарной матрицы (сл.7) вытекает следующее

Предложение

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства V:
(1) $\mathcal{A}$ – изометрический оператор;
(2) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе является унитарной;
(3) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе является унитарной.

Наблюдение

Унитарная матрица с действительными элементами является ортогональной.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства V является изометрическим тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения имеют модуль 1.

$\Downarrow$ Пусть V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения имеют модуль 1. Тогда матрица A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе – диагональная с числами λ на главной диагонали, где $|\lambda| = 1$. Так как при этом $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$, имеем $A^{-1} = A^*$ и оператор $\mathcal{A}$ является изометрическим.
Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства V является изометрическим. Тогда $\mathcal{A}$ является нормальным оператором и в силу теоремы сл.6 V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственный вектор v, относящийся к λ. Согласно наблюдению сл.14 имеем $(v, v) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) =$ $= (\lambda v, \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}(v, v)$. Поскольку $(v, v) \neq 0$, получаем $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda| = 1$.$\Uparrow$

Следствие

Все корни характеристического многочлена любой унитарной, в частности, ортогональной, матрицы по модулю равны 1.

Предложение

Пусть V – евклидово пространство размерности n, $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор на V, и $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень ($\beta \neq 0$) характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$. Тогда V имеет инвариантное относительно операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ подпространство $U = \langle e, f \rangle$, где $e \perp f$, $|e| = |f| = 1$ и $\mathcal{A}e = \alpha e - \beta f$, $\mathcal{A}f = \beta e + \alpha f$, причем $\chi_{\mathcal{A}|U} = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ и подпространство $U^{\perp}$ инвариантно относительно операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

$\Downarrow$ Зафиксируем ортонормированный базис B в V. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда $A^{\top} \cdot A = A \cdot A^{\top}$. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{A}}$, заданный матрицей A на пространстве столбцов $\mathbb{C}_n$ в базисе из столбцов единичной матрицы E_n. Тогда $\tilde{\mathcal{A}}z = A \cdot z$ для любого $z \in \mathbb{C}_n$. Так как оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет в ортонормированном базисе матрицу A, удовлетворяющую условию $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, этот оператор является нормальным. Поскольку $\chi_{\tilde{\mathcal{A}}} = \chi_A$, число λ является собственным значением оператора $\tilde{\mathcal{A}}$. Для него существует собственный вектор $z \in \mathbb{C}_n$. Запишем $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}_n$. Имеем $\tilde{\mathcal{A}}z = \lambda z$, откуда $A \cdot (x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$, т.е. $A \cdot x + iA \cdot y = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$. Следовательно, $A \cdot x = \alpha x - \beta y$, $A \cdot y = \beta x + \alpha y$. Положим $u = B \cdot x$, $v = B \cdot y$. Тогда $\mathcal{A}u = \alpha u - \beta v$, $\mathcal{A}v = \beta u + \alpha v$. Поэтому подпространство $U = \langle u, v \rangle$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Окончание доказательства предложения

Покажем, что оно инвариантно и относительно $\mathcal{A}^*$. Для этого вычислим $A^\top \cdot x$ и $A^\top \cdot y$. По утверждению 2 предложения сл.4 вектор z является собственным для оператора $\tilde{\mathcal{A}}^*$, относящимся к собственному значению $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Оператор $\tilde{\mathcal{A}}^*$ имеет в базисе из столбцов единичной матрицы E_n матрицу $A^* = A^\top$. Следовательно, $A^\top \cdot (x + iy) = (\alpha - i\beta)(x + iy)$, откуда $A^\top \cdot x + iA^\top \cdot y = \alpha x + \beta y + i(-\beta x + \alpha y)$ и $A^\top \cdot x = \alpha x + \beta y$, $A^\top \cdot y = -\beta x + \alpha y$. Поэтому $\mathcal{A}^* u = \alpha u + \beta v$, $\mathcal{A}^* v = -\beta u + \alpha v$ и подпространство $U = \langle u, v \rangle$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$. В силу предложения сл.11 т.2-17 $U^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.

Покажем, что $u \perp v$ и $|u| = |v|$. Для этого вычислим $\tilde{\mathcal{A}}(x - iy) = A \cdot (x - iy) = A \cdot x - iA \cdot y = \alpha x - \beta y - i(\beta x + \alpha y) = (\alpha - i\beta)(x - iy)$. Мы видим, что $x - iy$ – собственный вектор оператора $\tilde{\mathcal{A}}$, относящийся к собственному значению $\alpha - i\beta \neq \alpha + i\beta$. По утверждению 3 сл.4 имеем $(x + iy) \perp (x - iy)$, т.е. $(x + iy, x - iy) = 0$ в унитарном пространстве $\mathbb{C}_n$. Имеем $0 = (x + iy, x - iy) = (x + iy)^\top \cdot \overline{x - iy} = (x + iy)^\top \cdot (x + iy) = x^\top \cdot x - y^\top \cdot y + iy^\top \cdot x + ix^\top \cdot y = (x, x) - (y, y) + 2i(x, y)$. Из равенства $(x, x) - (y, y) + 2i(x, y) = 0$ получаем $(x, x) - (y, y) = 0$ и $(x, y) = 0$. Так как $(u, u) = (x, x)$, $(v, v) = (y, y)$ и $(u, v) = (x, y)$, получаем $u \perp v$ и $|u| = |v|$. Нормируем векторы u и v: $e = \frac{1}{|u|} u$, $f = \frac{1}{|v|} v$. Эти векторы удовлетворяют всем условиям предложения. Ограничение $\mathcal{A}_U$ имеет в базисе (e, f) матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, поэтому $\chi_{\mathcal{A}|U}$ имеет требуемый вид.⇑

Нормальные операторы евклидовых пространств (1)

Теорема

Пусть V – евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$. Оператор $\mathcal{A}$ является нормальным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис $g_1, \ldots, g_m, e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k$, где $g_1, \ldots, g_m$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, а пары e_j, f_j порождают инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства, причем $\mathcal{A}e_j = \alpha_j e_j - \beta_j f_j$, $\mathcal{A}f_j = \beta_j e_j + \alpha_j f_j$, где $\alpha_j \pm i\beta_j$ – пара комплексных корней характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе является блочной диагональной, на главной диагонали сначала стоят блоки (λ_ℓ) $(\ell = 1, \ldots, m)$ с действительными собственными значениями оператора $\mathcal{A}$, а за ними - блоки $\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ $(j = 1, \ldots, k)$, соответствующие комплексно сопряженным корням характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$; при этом $n = m + 2k$.

$\Downarrow$ Пусть оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. Используем индукцию по n. При $n = 1$ все операторы являются самосопряженными, поэтому доказывать в силу теоремы сл.14 нечего. Предположим, что для всех нормальных линейных операторов евклидовых пространств размерности меньше n утверждение уже доказано. Пусть $\dim V = n$ и $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор на V. Рассмотрим два случая.

1. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ имеет действительный корень λ_1. Зафиксируем собственный вектор g_1 линейного оператора $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению λ_1. Можно считать, что $|g_1| = 1$. Вектор g_1 является собственным и для оператора $\mathcal{A}^*$ в силу утверждения 2 предложения сл.4. Тогда подпространство $\langle g_1 \rangle$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$. Согласно предложению сл.11 т.2-17 подпространство $U = \langle g_1 \rangle^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ и относительно $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$. Имеем $\dim U = n - 1$.
2. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ имеет пару комплексно сопряженных корней $\alpha_1 \pm i\beta_1$. Тогда согласно предложению сл.23 V имеет инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$ подпространство $\langle e_1, f_1 \rangle$, где $|e_1| = |f_1| = 1$, $e_1 \perp f_1$ и $\mathcal{A}e_1 = \alpha_1 e_1 - \beta_1 f_1$, $\mathcal{A}f_1 = \beta_1 e_1 + \alpha_1 f_1$. Согласно предложению сл.11 т.2-17 подпространство $U = \langle e_1, f_1 \rangle^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ и относительно $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$. Имеем $\dim U = n - 2$.

Таким образом, в обоих случаях V имеет инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$ подпространство U меньшей размерности. Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_U$ и покажем, что $\mathcal{A}_1$ – нормальный линейный оператор. Для этого достаточно убедиться, что $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}^*|_U$. Это равенство вытекает из того, что для любых $x, y \in U$ имеет место $(\mathcal{A}_1 x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$. Применяя предположение индукции к оператору $\mathcal{A}_1$ на пространстве U, получаем, что в нем существует требуемый ортонормированный базис. Добавляя к нему на первое место вектор g_1 или на нужное иместо векторы e_1, f_1, завершаем доказательство по индукции.

Докажем, что если евклидово пространство V имеет ортонормированный базис для оператора $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию теоремы, то оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. Обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в указанном базисе. Тогда A является блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой имеется не более одного диагонального блока (соответствующего части базиса, состоящей из всех собственных векторов) и несколько (быть может, ни одного) блоков вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Матрица $A^\top$ также является блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой имеется не более одного диагонального блока и этот блок тот же, что в матрице A, а каждый блок порядка 2 заменен на $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Так как блочные матрицы умножаются поблочно, достаточно заметить, что $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ (см. сл.2 т.1-8). Таким образом, $A \cdot A^\top = A^\top \cdot A$ и в силу предложения сл.5 оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. Теорема полностью доказана.$\Uparrow$

Определение

Будем называть *каноническим* ортонормированный базис евклидова пространства для нормального оператора, указанный в формулировке теоремы сл.25.

Пример

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Убедиться, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, найти для него канонический ортономированный базис и матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Решение основано на доказательстве предложения сл.23. Сначала находим характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$, все его корни, включая комплексные, и собственные векторы для всех действительных корней $\chi_{\mathcal{A}}$, а также собственные векторы в $\mathbb{C}_3$ для комплексных корней $\chi_{\mathcal{A}}$ (один вектор для одного из пары комплексно сопряженных корней). Для данной матрицы это сделано на сл.9-10. Берем собственный вектор $g = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ для собственного значения 0 и вектор $a_2 = (2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3})$ для корня $-i\sqrt{3}$. Записываем $a_2 = (2, -1, -1) + i(0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и полагаем $x = (2, -1, -1)$, $y = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Проверяем: $(x, x) = 6 = (y, y)$, $(x, y) = 0 = (g, x) = (g, y)$. Нормируем векторы x, y: $e = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$, $f = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$. Получаем канонический базис (g, e, f). Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Определение

Изометрический оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства V является ортогональным тогда и только тогда, когда V имеет канонический ортонормированный базис для $\mathcal{A}$ и все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ по модулю равны 1. Определитель матрицы ортогонального оператора в любом базисе равен 1 или -1.

$\Downarrow$ Если оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства V является ортогональным, то требуемое вытекает из теоремы сл.25 и следствия сл.22. Пусть V имеет канонический ортонормированный базис для $\mathcal{A}$ и все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ по модулю равны 1, и пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда на ее главной диагонали стоят числа $1, -1$ и блоки вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, в которых $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

В матрице A^{-1} на главной диагонали числа $1, -1$ не изменяются, а вместо указанного блока стоит обратная матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{\top}$. Следовательно, $A^{-1} = A^{\top}$ и согласно предложению сл.21 оператор $\mathcal{A}$ является изометрическим, т.е. ортогональным.

Матрица A ортогонального оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A^{\top} = A^{-1}$, поэтому $A^{\top} \cdot A = E_n$ и $1 = |A^{\top} \cdot A| = |A^{\top}| \cdot |A| = |A|^2$, т.е. $|A| = 1$ или $|A| = -1$. Так как все матрицы одного линейного оператора имеют один и тот же определитель, второе утверждение теоремы доказано.$\Uparrow$

Канонический базис для ортогонального оператора евклидова пространства находится точно так же, как для нормального оператора (сл.28)

Заметим, что на двумерном инвариантном подпространстве $\langle e, f \rangle$ ортогональный оператор действует как оператор поворота на плоскости, так как из условия $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ следует, что $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}$, и матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ есть матрица поворота плоскости по часовой стрелке на угол φ (сл.10 т.2-7).

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – отображение евклидова пространства V в себя. Следующие условия для $\mathcal{A}$ эквивалентны:
(1) $\mathcal{A}0_V = 0_V$ и $\forall x, y \in V\ |\mathcal{A}x - \mathcal{A}y| = |x - y|$;
(2) $\forall x, y \in V\ (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$;
(3) $\mathcal{A}$ – ортогональный линейный оператор пространства V.

$\Downarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) При $y = 0_V$ из условия (1) следует $|\mathcal{A}x| = |x|$ для любого $x \in V$. Для любых $x, y \in V$ имеем $|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y|^2 = |x - y|^2$, откуда $(\mathcal{A}x - \mathcal{A}y, \mathcal{A}x - \mathcal{A}y) = (x - y, x - y)$. Таким образом, $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - 2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y)$, откуда $|\mathcal{A}x|^2 - 2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + |\mathcal{A}y|^2 = |x|^2 - 2(x, y) + |y|^2$. Следовательно, $-2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = -2(x, y)$ и $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Докажем, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Для любых векторов $x, y \in V$ имеем
$(\mathcal{A}(x+y) - \mathcal{A}x - \mathcal{A}y)^2 = (\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}(x+y)) + (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}y) - 2(\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}x) - 2(\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}y) + 2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x+y, x+y) + (x,x) + (y,y) - 2(x+y,x) - 2(x+y,y) + 2(x,y) = (x+y-x-y)^2 = 0_V^2 = 0$, откуда $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$. Аналогично для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого вектора $x \in V$ имеем
$(\mathcal{A}(\lambda x) - \lambda(\mathcal{A}x))^2 = (\mathcal{A}(\lambda x), \mathcal{A}(\lambda x)) - 2(\mathcal{A}(\lambda x), \lambda(\mathcal{A}x)) + (\lambda(\mathcal{A}x), \lambda(\mathcal{A}x)) = (\lambda x, \lambda x) - 2\lambda(\mathcal{A}(\lambda x), \mathcal{A}x) + \lambda^2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\lambda x, \lambda x) - 2\lambda(\lambda x, x) + \lambda^2(x,x) = \lambda^2(x,x) - 2\lambda^2(x,x) + \lambda^2(x,x) = 0$, откуда $\mathcal{A}(\lambda x) - \lambda(\mathcal{A}x) = 0_V$. Следовательно, $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Наблюдение сл.20 показывает, что $\mathcal{A}$ – ортогональный линейный оператор.
(3) $\Rightarrow$ (1) Так как $\mathcal{A}$ – линейный оператор, $\mathcal{A}0_V = 0_V$ и $\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = \mathcal{A}(x-y)$. Поскольку $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, согласно наблюдению сл.20 при $x = y$ имеем $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x,x)$, т.е. $|\mathcal{A}x| = |x|$. Следовательно, $|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y| = |\mathcal{A}(x-y)| = |x-y|$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Заметим, что условие $\mathcal{A}0_V = 0_V$ в условии (1) теоремы сл.31 существенно, как показывает пример отображения $\mathcal{A}x = x + a$, где $a \neq 0_V$ – фиксированный вектор из V.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V называется *неотрицательным* (соотв. *положительным*), если $\mathcal{A}$ самосопряженный и для любого $x \in V$ имеет место $(\mathcal{A}x, x) \geq 0$ (соотв. $(\mathcal{A}x, x) > 0$ при $x \neq 0_V$).

Заметим, что для самосопряженного оператора унитарного пространства $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}$, поэтому $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$. Напомним, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора – действительные числа.

Теорема

Самосопряженный линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V является неотрицательным (соотв. положительным) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (соотв. положительны).

$\Downarrow$ Пусть λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и x – относящийся к нему собственный вектор. Так как $(\mathcal{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x)$ и $(x, x) > 0$, получаем $\lambda \geq 0$ для неотрицательного и $\lambda > 0$ для положительного оператора.

Предположим, что все собственные значения с учетом кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V неотрицательны (соотв. положительны). Пространство V имеет ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $x \in V$, $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$. Тогда $(\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n), \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = (\xi_1 \mathcal{A} e_1 + \ldots + \xi_n \mathcal{A} e_n, \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = (\xi_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \xi_n \lambda_n e_n, \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = \lambda_1 \xi_1 \overline{\xi_1} + \ldots + \lambda_n \xi_n \overline{\xi_n}$. Поскольку $\xi_j \overline{\xi_j} = |\xi_j|^2 \geq 0$ и при $x \neq 0_V$ найдется j при котором $|\xi_j| > 0$, получаем требуемое заключение.$\Uparrow$

Следствие

Неотрицательный оператор является обратимым тогда и только тогда, когда когда он положителен.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.13 т.2-9 и доказанной только что теоремы.

Теорема

Для любого неотрицательного линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V размерности n существует единственный неотрицательный линейный оператор $\mathcal{B}$ пространства V такой что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Выберем в пространстве V ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}e_j = \lambda_j e_j$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Определим оператор $\mathcal{B}$, полагая $\mathcal{B}e_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда $\mathcal{B}$ – неотрицательный линейный оператор пространства V и $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$. Докажем единственность. Пусть $\mathcal{C}$ – неотрицательный линейный оператор пространства V и $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. так как $\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{C}^3 = \mathcal{A}\mathcal{C}$, операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ перестановочны. Тогда и операторы $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$ перестановочны. В силу предложения сл.10 т.2-14 все корневые подпространства оператора $\mathcal{A}$, будучи ядрами операторов $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ для некоторых скаляров λ, инвариантны относительно $\mathcal{C}$. Пусть $U = V(\lambda, \mathcal{A})$ – такое подпространство. Тогда для любого $u \in U$ справедливо $\mathcal{A}u = \lambda u$. Покажем, что $\mathcal{C}|_U = \mathcal{B}|_U$. Этим теорема будет доказана. Поскольку $\chi_{\mathcal{C}|_U}$ делит $\chi_{\mathcal{C}}$, оператор $\mathcal{C}|_U$ является неотрицательным и в подпространстве U имеется ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{C}|_U$. Для любого вектора g этого базиса имеем $\mathcal{C}g = \mu_g g$, где $\mu_g \geq 0$. Тогда $\lambda g = \mathcal{A}g = \mathcal{C}^2 g = \mu_g^2 g$ и $\mu_g = \sqrt{\lambda}$. Так как $\mathcal{B}g = \sqrt{\lambda}g$ по определению, получаем требуемое. $\Uparrow$

Теорема

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V размерности n существуют единственный неотрицательный линейный оператор $\mathcal{B}$ и изометрический оператор $\mathcal{C}$ пространства V такие что $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$. Если оператор $\mathcal{A}$ обратим, то и оператор $\mathcal{C}$ определен однозначно.

$\Downarrow$ Рассмотрим оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Покажем, что он является самосопряженным и неотрицательным. Имеем в силу предложений сл.4 и 5 т.2-17 $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Далее, $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x), x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0$ для любого $x \in V$. В силу теоремы сл.35 существует единственный неотрицательный линейный оператор $\mathcal{B}$ такой что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Тогда, поскольку $\mathcal{B}$ – самосопряженный оператор, $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, y) =$ $= (\mathcal{B}^2x, y) = (\mathcal{B}^*\mathcal{B}x, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{B}y)$ для любых $x, y \in V$. Для завершения доказательства применим предложение следующего слайда.$\Uparrow$

В заключение заметим, что если $\mathcal{A}$ – обратимый оператор, то и $\mathcal{A}^*$ будет обратим (следует рассмотреть матрицы этих операторов в ортонормированном базисе) и потому $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ будет положительным в силу следствия сл.34. Следовательно, оператор $\mathcal{B}$ будет положительным и также обратимым. Тогда оператор $\mathcal{C}$ однозначно определяется из равенства $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы евклидова или унитарного пространства V размерности n такие что $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{B}y)$ для любых векторов $x, y \in V$. Тогда существует изометрический оператор $\mathcal{C}$ пространства V такой что $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$.

$\Downarrow$ Из условия следует, что $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{B}x, \mathcal{B}x) = 0$, откуда $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{B}$. Следовательно, $\mathrm{d}(\mathcal{A}) = \mathrm{d}(\mathcal{B})$ и в силу теоремы сл.6 т.2-8 имеем $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{B})$. Выберем в $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_m)$. Пусть $\mathcal{A}f_j = e_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Положим $g_j = \mathcal{B}f_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Так как $(e_j, e_k) = (\mathcal{A}f_j, \mathcal{A}f_k) = (\mathcal{B}f_j, \mathcal{B}f_k) = (g_j, g_k)$, система $(g_1, \ldots, g_m)$ является ортонормированной и потому образует ортонормированный базис в $\mathrm{Im}\mathcal{B}$. Если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \neq \{0_V\}$, то дополним $(e_1, \ldots, e_m)$ до ортонормированного базиса всего пространства V векторами $e_{m+1}, \ldots, e_n$, а систему $(g_1, \ldots, g_m)$ дополним до ортонормированного базиса всего пространства V векторами $g_{m+1}, \ldots, g_n$. Для этого достаточно взять ортонормированные базисы в ортогональных дополнениях $(\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp}$ и $(\mathrm{Im}\mathcal{B})^{\perp}$. Согласно теореме сл.7 т.2-7 существует линейный оператор $\mathcal{C}$ пространства V такой что $\mathcal{C}g_j = e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. В силу предложения сл.20 оператор $\mathcal{C}$ является изометрическим.

Окончание доказательства предложения

Действие операторов $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ на векторы f_j, e_j, g_j можно пояснить с помощью следующей диаграммы.

$$\begin{tikzcd} & f_j \arrow[dl, "\mathcal{B}"'] \arrow[dr, "\mathcal{A}"] & \\ g_j \arrow[rr, "\mathcal{C}"] & & e_j \end{tikzcd}$$

Покажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$. Пусть $x \in V$. Так как $(e_1, \ldots, e_m)$ – базис в $\mathrm{Im}\mathcal{A}$, имеем $\mathcal{A}x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$ для некоторых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Из равенства $\mathcal{A}(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m) = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$ следует $x - (\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m) \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Поскольку $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{B}$, заключаем, что $\mathcal{B}x = \mathcal{B}(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m) = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_m g_m$. Так как $\mathcal{C}(\mathcal{B}f_j) = \mathcal{A}f_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, получаем $\mathcal{C}(\mathcal{B}x) = \mathcal{A}x$, откуда следует требуемое равенство $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$.$\Uparrow$

Определение

Представление линейного оператора $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$ в виде произведения изометрического оператора $\mathcal{C}$ и неотрицательного оператора $\mathcal{B}$ называется *полярным разложением* оператора $\mathcal{A}$.

Найти полярное разложение линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}^*$ имеет матрицу $A^\top$. Оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ имеет матрицу
$$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$ Извлекаем из $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ квадратный корень,

получаем оператор $\mathcal{B}$ с матрицей $B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$.

Находим матрицу оператора $\mathcal{C}$: $C = A \cdot B^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем: $C^{\top} \cdot C = E_4$, т.е. C – ортогональная матрица и $\mathcal{C}$ – ортогональный оператор.

Полярное разложение: $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{B}$.